## 8. Esercizi

Ricordando che $I_\rho(x)$ indica l'intorno aperto di raggio $\rho$ del punto $x$, cioè l'intervallo $(x-\rho, x+\rho)$, determinare i seguenti insiemi:

**1** $I_3(2) \cap I_3(-2)$

**2** $I_3(2) \cup I_3(-2)$

**3** $I_3\left(\dfrac{3}{2}\right) - I_1(0)$

**4** $I_3(2) \cap \left(I_{\frac{1}{2}}(1)\right)^c$

---

Trovare $\inf A$ e $\sup A$ e, quando esistono, $\min A$ e $\max A$ nei seguenti casi:

**5** $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x < 1\}$

**6** $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < x \leq 1\}$

**7** $A = \left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} - \{0\}\right\}$

**8** $A = \left\{\dfrac{(-1)^n n}{n+1} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$

**9** $A = \left\{\dfrac{m}{n+1} \mid n, m \in \mathbf{N},\ \text{con } m \leq n\right\}$

**10** $A = \left\{\dfrac{1}{2^n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$

**11** $A = \left\{\dfrac{k}{2^n} \mid k, n \in \mathbf{N},\ \text{con } 0 < k < 2^n\right\}$

**12** $A = \left\{n + \dfrac{5}{n} \mid n \in \mathbf{N} - \{0\}\right\}$

**13** $A = \left\{n + \dfrac{5000}{n} \mid n \in \mathbf{N} - \{0\}\right\}$

**14** $A = \left\{x + \dfrac{1}{x} \mid x \in \mathbf{R},\ x > 0\right\}$

15 $A = \left\{ \frac{n+1}{m+1} + \frac{m+1}{n+1} \mid n, m \in \mathbf{N} \right\}$

16 $A = \left\{ \frac{n\sqrt{2}}{m+1} \mid n, m \in \mathbf{N} \right\}$

17 $A = \left\{ \frac{2m+1}{2n+2} + \frac{2n+2}{2m+1} \mid n, m \in \mathbf{N} \right\}$

18 $A = \{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n \in \mathbf{N} \}$

---

Determinare che insiemi si ottengono dalle seguenti unioni e/o intersezioni infinite:

19 $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left[ \frac{1}{n+1}, +\infty \right)$

20 $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left( -\frac{1}{n+1}, +\infty \right)$

21 $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left( -\frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1} \right)$

22 $\bigcup_{n \in \mathbf{N} - \{0\}} \left( \left( -\infty, -\frac{1}{n} \right] \cup \left[ 1 + \frac{1}{n}, +\infty \right) \right)$

23 $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left( 0, \frac{1}{n+1} \right)$

24 $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left[ 0, \frac{1}{n+1} \right)$

25 $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{-n, n\}$

26 $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left( \bigcup_{m \in \mathbf{Z}} \left\{ \frac{m}{n+1} \right\} \right)$

27 $\bigcup_{q \in \mathbf{Q}} \left( \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left( q - \frac{1}{n+1}, q + \frac{1}{n+1} \right) \right)$

28 $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left( \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} \left( q - \frac{1}{n+1}, q + \frac{1}{n+1} \right) \right)$

29 $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left( \bigcup_{m \in \mathbf{N}} \left[ 0, 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right] \right)$

30 $\bigcup_{m \in \mathbf{N}} \left( \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left[ 0, 1 + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right] \right)$

---

Nei seguenti casi trovare i punti **interni**, **esterni**, **di frontiera**, **di accumulazione** e **isolati** dell'insieme $A$. Dire poi se $A$ è **aperto**, **chiuso**, **denso** e/o **discreto**.

31 $A = [-1, +\infty)$

32 $A = (-1, 1)$

33 $A = \{1\}$

34 $A = \mathbf{R}$

35 $A = \mathbf{Z}$

36 $A = (0, 1) \cup (1, 2)$

37 $A = \mathbf{Q}$

38 $A = \left\{ \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$

39 $A = \left\{ \frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbf{N} \right\} \cup \{0\}$

40 $A = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid n, m \in \mathbf{N},\ 0 < m < 2^n \right\}$

41 $A = \{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor \mid n \in \mathbf{N} \}$

42 $A = \{ \sqrt{n} - \sqrt{m} \mid n, m \in \mathbf{N} \}$

43 $A = \left\{ n - \left\lfloor \frac{n}{2\pi} \right\rfloor \cdot 2\pi \mid n \in \mathbf{N} \right\}$

44 $A = \{ \sin n \mid n \in \mathbf{N} \}$

---

Per ciascuna delle seguenti funzioni determinare gli insiemi a fianco indicati:

45 $f(x) = x^2 - 3x + 2$; Determinare: $f(0)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}([0,2))$, $f^{-1}(f(4))$.

46 $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$; Determinare: $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(1)$.

47 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$; Determinare: $f^{-1}((0,1])$, $f^{-1}((-\infty,0))$.

---

In ciascuno dei seguenti casi dire se $f$ è **iniettiva** e/o **suriettiva**:

48 $\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$

49 $\begin{aligned} f : \mathbf{N} &\to \mathbf{N} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$

50 $\begin{aligned} f : \mathbf{Q} &\to \mathbf{Q} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$

51 $\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

52 $\begin{aligned} f : \mathbf{R} &\to \mathbf{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

53 $\begin{aligned} f : \mathbf{R}^+ &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

54 $\begin{aligned} f : \mathbf{R}^+ &\to \mathbf{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

55 $\begin{aligned} f : \mathbf{Q} &\to \mathbf{Q} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

56 $\begin{aligned} f : \mathbf{Q}^+ &\to \mathbf{Q}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

---

Nei seguenti casi calcolare $f \circ g$ e $g \circ f$ :

57 $f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1$

58 $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$

59 $f(x) = x^4, \quad g(x) = \sqrt{x}$

60 $f(x) = x^3, \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

61 $f(x) = e^x, \quad g(x) = \ln(x+1)$

62 $f(x) = e^{x+1}, \quad g(x) = \ln x$

---

Di ciascuna delle seguenti funzioni, considerata nel proprio dominio naturale, dire se è **crescente**, **decrescente**, **pari**, **dispari** e/o **periodica**:

63 $f(x) = x^3 + x$

64 $f(x) = x^3 + x^2$

65 $f(x) = x^4 + x^2$

66 $f(x) = \sin^2 x$

67 $f(x) = \sin x^2$

68 $f(x) = \tan x^3$

69 $f(x) = e^{\sin x}$

70 $f(x) = \sin e^x$

71 $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

72 $f(x) = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1+e^{-x}}}$

73 $f(x) = 2x - \lfloor 2x \rfloor$

74 $f(x) = 2x - 2\lfloor x \rfloor$

75 $f(x) = 2x + \lfloor 2x \rfloor$

76 $f(x) = 2|x| + \lfloor 2|x| \rfloor$

77 $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$

78 $f(x) = \sqrt{\arctan \dfrac{1}{x}}$

79 $f(x) = \dfrac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$

80 $f(x) = \sin x + \sin \pi x$

81 $f(x) = \chi_{\mathbf{Q}}$

82 $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$

---

Delle seguenti funzioni trovare il dominio naturale, cioè il più grande sottoinsieme di $\mathbf{R}$ su cui possono essere definite:

83 $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$

84 $f(x) = \ln\left(x^5 - x^3\right)$

85 $f(x) = \sqrt{\ln \dfrac{1}{x^2 - 4x + 4}}$

86 $f(x) = \sqrt{\ln(\ln(\ln x))}$

87 $f(x) = \sqrt{|x| - x^2}$

88 $f(x) = \sqrt{2\sin 2x + 1} + \ln\left(\cos\dfrac{x}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

89 $f(x) = \ln\left(\sqrt{24 - 3x^2 + 12x} - 3x\right)$

90 $f(x) = \sqrt{1 - x - \sqrt{x + 1}}$

91 $f(x) = \dfrac{1}{1 + \cos x^2}$

92 $f(x) = \dfrac{1}{\tan(\pi \sin x)}$

---

Nei seguenti casi dire se $f$ è **invertibile** e, in caso affermativo, trovare $f^{-1}$:

93 $\begin{aligned} f : [0,2] &\to [0,4] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

94 $\begin{aligned} f : [-1,1] &\to [0,1] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$

95 $\begin{aligned} f : \mathbf{R} - \{0\} &\to \mathbf{R} - \{0\} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$

96 $\begin{aligned} f : \left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right] &\to [0,1] \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$

97 $\begin{aligned} f : \left[-\frac{3\pi}{2}, -\pi\right] &\to [-1,0] \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$

98 $\begin{aligned} f : \left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right) &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto \tan x \end{aligned}$

---

Operando opportune trasformazioni sui grafici di funzioni già note (cioè $x^2$, $\dfrac{1}{x}$, $2^x$, $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x$) disegnare il grafico delle seguenti funzioni:

99 $f(x) = (x-1)^2 + 1$

100 $f(x) = x^2 - 6x + 8$

101 $f(x) = x^2 - 6|x| + 8$

102 $f(x) = |x^2 - 1|$

103 $f(x) = \left|(|x| - 1)^2 - 1\right|$

104 $f(x) = \dfrac{1}{|x| + 1}$

105 $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x + 1}$

106 $f(x) = \left|2 + \dfrac{1}{x + 1}\right|$

107 $f(x) = 2^{|x|}$

108 $f(x) = |2^x - 1|$

109 $f(x) = \left|2^{|x|} - 2\right|$

110 $f(x) = \left|2^{|x|-1} - 4\right|$

111 $f(x) = 2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

112 $f(x) = \tan\dfrac{x+\pi}{2}$

113 $f(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$

---

Per ciascuna delle seguenti coppie di insiemi, mostrare che i due insiemi hanno la stessa cardinalità esibendo esplicitamente una funzione biunivoca tra essi:

114 $\mathbf{N}$ e $\mathbf{N} - \{0\}$

115 $\mathbf{N}$ e $\mathbf{P} = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$

116 $\mathbf{N}$ e $\mathbf{Z}$

117 $\mathbf{R}$ e $(0,1)$

118 $[0,1)$ e $(0,1)$

119 $\mathbf{R}$ e $\mathbf{R} - \mathbf{Z}$

---

In ciascuno dei casi seguenti dire se $\mathcal{A}$ è numerabile, oppure se ha la cardinalità del continuo oppure cardinalità ancora maggiore:

120 $\mathcal{A} = \mathbf{Q}$

121 $\mathcal{A} = \mathbf{R} - \mathbf{Q}$

122 $\mathcal{A}$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi finiti di $\mathbf{N}$

123 $\mathcal{A}$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi finiti di $\mathbf{R}$.

124 $\mathcal{A}$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi limitati di $\mathbf{R}$.

125 $\mathcal{A}$ è la famiglia di tutti i polinomi a coefficienti in $\mathbf{Z}$.

126 $\mathcal{A}$ è la famiglia di tutti i polinomi a coefficienti in $\mathbf{R}$.

127 $\mathcal{A}$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi aperti di $\mathbf{R}$.

128 $\mathcal{A} = \{x \in [0,1) \mid \text{in base 3 la parte decimale di } x \text{ non ha mai la cifra } 1\}$

---