9. Esercizi

Verificare, usando solo la definizione di limite, che:

1 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

2 $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$

3 $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n =$ non esiste

4 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$

5 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+7} = +\infty$

6 $\lim_{n\to+\infty} \log_2(2n+3) - \log_2(n+1) = 1$

Quali, tra le affermazioni che seguono, equivalgono a dire che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbf{R}$?

7 per ogni $\epsilon > 0$, definitivamente in n, si ha $|a_n - \ell| \leq \epsilon$

8 per ogni $\epsilon \geq 0$, definitivamente in n, si ha $|a_n - \ell| < \epsilon$

9 per ogni $\epsilon > 0$, definitivamente in n, si ha $|a_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$

10 per ogni $\epsilon \in (0,1]$, definitivamente in n, si ha $|a_n - \ell| < \epsilon$

Dire quali, tra le seguenti affermazioni, sono vere o false:

11 frequentemente in n, $\sin n > 0$.

12 definitivamente in n, $\sin n > -\frac{1}{2}$.

13 per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, definitivamente in n, $\frac{(-1)^n}{n} < \lambda$

14 esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che, definitivamente in n, $\frac{(-1)^n}{n} < \lambda$

15 per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, frequentemente in n, $(-1)^n \cdot n < \lambda$

16 frequentemente in n, per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, $(-1)^n \cdot n < \lambda$

17 definitivamente in n, frequentemente in k, $\sin n > \cos k$

18 frequentemente in k, definitivamente in n, $\sin n > \cos k$

Scrivere in simboli, cioè usando quando serve i termini *"per ogni"*, *"esiste"*, *"frequentemente"* e *"definitivamente"*, le seguenti affermazioni su una successione (a_n) a valori in $\mathbf{R}$:

19 a_n non tende a 5

20 a_n non è limitata

Usando solo i teoremi del confronto e il fatto che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ calcolare i seguenti limiti:

21 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}$

22 $\lim_{n\to+\infty} 2n - \sin n$

23 $\lim_{n\to+\infty} n^2 - n$

24 $\lim_{n\to+\infty} \frac{|\sin n|}{n}$

25 $\lim_{n\to+\infty} \frac{5 + 3\sin n}{n^2}$

26 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 1}{n - \sqrt{n}}$

27 $\lim_{n\to+\infty} 4^n - 2^n$

28 $\lim_{n\to+\infty} \log_2 (4^n - 2^n)$

29 $\lim_{n\to+\infty} \log_2 (3^n - 2^n)$

30 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+1} - n$

31 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^4+3n} - \sqrt{n^4+n}$

32 $\lim_{n\to+\infty} 2^{n+1} - 2^n$

33 $\lim_{n\to+\infty} a_n$ dove (a_n) è definita per ricorrenza da $\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_{n+1} = a_n - (a_n)^2 . \end{cases}$

Usando solo gli argomenti sviluppati fino al paragrafo **4**, più eventualmente il teorema **30**, calcolare i seguenti limiti:

34 $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{n^{100}}$

35 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_5 \left(n^{100}+2\right)}{n!}$

36 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^3}$

37 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{2^{2n}}$

38 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(-5)^n}{n!}$

39 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{(-5)^n}$

40 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{n!}$

41 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\log_2\left(n^4+1\right)}$

42 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_2\left(n^2\right)}{\left(\log_2 n\right)^2}$

43 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_{10}\left(n^4\right)}{\left(\log_3 n\right)^2}$

44 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^5 2^n + n^{10}}{n^2+3^n}$

45 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^4 \log_5 n^2}{(n-1)^5}$

46 $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n - 2^n$

47 $\lim\limits_{n\to+\infty} (-3)^n - 2^n$

48 $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n - (-2)^n$

49 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

50 $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n^3}$

51 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n^{n+1}} + 2^{n^2}}{(2n)!}$

52 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(4-\frac{1}{n}\right)^n}$

53 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{1+\log_3 n}}{n}$

54 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n-1)!}{2^{n+1}}$

55 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{100^{\sqrt{n}}}{10^n}$

56 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{10^{n^3}}{1000^n}$

57 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^{2n}}{2^{n^2}}$

Usando solo gli argomenti sviluppati fino al paragrafo **4**, confrontare l'ordine di infinito delle seguenti successioni:

58 $a_n = n^n, \quad b_n = (3n)^{1000}, \quad c_n = 1000^n$

59 $a_n = \sqrt[10]{n}, \quad b_n = \log_7 n, \quad c_n = \left(\sqrt{2}\right)^n$

60 $a_n = (\ln 3)^n, \quad b_n = \sqrt{2n}, \quad c_n = (\ln n)^{10}$

61 $a_n = \left(10^n\right)^2, \quad b_n = \sqrt{10^{n^2}}, \quad c_n = 10000^{\sqrt{n}}$

62 $a_n = \ln\left(n^2+1\right), \quad b_n = \ln(2n+5), \quad c_n = \ln\left(2n^2+3\right)$

63 $a_n = \ln\sqrt{n^2+1}, \quad b_n = \sqrt{\ln\left(n^2+1\right)}, \quad c_n = \left(\ln\left(1+\sqrt{n}\right)\right)^2$

64 $a_n = \ln\left(n^n+1\right), \quad b_n = n\sqrt{n}, \quad c_n = \dfrac{n}{\left(\log_n e\right)^2}$

65 $a_n = n^{n+1}, \quad b_n = n^n, \quad c_n = (n+2)!$

66 $a_n = e^n, \quad b_n = e^n + n, \quad c_n = e^{n+\ln n}$

67 $a_n = \sqrt{n!+1}, \quad b_n = n^{\frac{n}{2}}, \quad c_n = \left(\frac{n}{2}\right)^n$

Usando **solo** gli argomenti sviluppati fino al paragrafo **5** e l'osservazione **24**, calcolare i seguenti limiti:

68 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

69 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

70 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

71 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

72 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

73 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

74 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^n$

75 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\right)^{n+1}$

76 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^4}$

77 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^3}\right)^{n^2}$

78 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2+5}$

79 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{7}{n}\right)^{\frac{3n^2+5}{4n+1}}$

80 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^4+n+1}{n^2+7}}$

81 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+9}{n+5}\right)^{3n}$

82 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+5}{n+8}\right)^{\frac{n}{4}}$

83 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+2n+8}{n^2-3n+7}\right)^n$

84 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+n-6}{n^2+n+7}\right)^n$

85 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2-2n+1}{n^2-4n+7}\right)^{\frac{n^4-n+3}{2n^2+5}}$

86 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2-n-6}{n^2-n+2}\right)^{\frac{n^4+n+3}{n^2-1}}$

87 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+\log_n 2)^{\ln n}$

88 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^3}}$

89 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3}}$

Usando tutti gli argomenti trattati fino ad ora calcolare i seguenti limiti:

90 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{8^n+3^n}$

91 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^n+1}$

92 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{8}}+\frac{1}{\sqrt[n]{3}}\right)^n$

93 $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{8}-\sqrt[n]{3}\right)^n$

94 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}$

95 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2^{\sqrt{n}}+n^{100}}$

96 $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{\sqrt{n}}}{n^{100}}$

97 $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^2}{(n^2)!}$

98 $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$

99 $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+100)!}{n^n}$

100 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!+1}$

101 $\lim_{n\to+\infty}\log_n(1+n!)$

102 $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+\sin n}+3^{n-1}}{100^{\sqrt{n}}+\left(3+\frac{1}{n}\right)^n}$

103 $\lim_{n\to+\infty}\frac{8^{\sqrt{n}}+\sqrt{4^n-1}}{2^n-3^{\frac{n+\sin n}{2}}}$

104 $\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{n+1}+n^2 4^{\ln n}-2^{n-3}}{\sqrt{4^n+3}+\sqrt{3^n+4}}$

105 $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+\sin n)^{10}+n^9\ln n}{n^{10}+\sqrt{n^{20}+1}+\ln\left(1+n^{100}\right)}$

106 $\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot n^{3n}+7n\cdot(2n)!+1000^n}{10^{3n}-(2n+1)!+(n+1)^{3n}}$

107 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(n^2+1\right)\sqrt{n}+3n^2-\sqrt{n^5+1}}{\ln^2\left(n+e^n\right)+\sqrt[n]{n!+1}}$

108 $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^{n+\frac{1}{n}}+n!}{(n+2)^n-n^n}$

109 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^n}+n^{\sqrt{n}}+\left(\sqrt{n}\right)^n\right)^2}{(n+1)^n}$

110 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(2^n\cdot n!+n^n\right)^2}{(2n)!+(n+1)^{2n}}$

111 $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^{n+1}+n}{n^{n+1}+\sqrt{n}}\right)^{(n+1)^n}$

112 $\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n!}+2^{n!}}{\left(2-\frac{1}{n^2}\right)^{n!}+\left(2+\frac{1}{n!}\right)^{n!}}$

113 $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^{n+1}+((n+1)!)^n}{((n+1)!)^{n+\frac{1}{n}}+((n-1)!)^{n+2}}$

114 $\lim_{n\to+\infty}\left((n+9)^{100}+n^{98}\ln(n!)-n^{100}\right)\cdot\left(\sqrt{n^{199}+1}-\sqrt{n^{199}-1}\right)$

115 $\lim_{n\to+\infty}\frac{n!\cdot 2^n}{(2n)!}$

116 $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^2\cdot 3^n}{(2n)!}$

117 $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 5^n}{(2n)!}$

118 $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2 \cdot 4^n}{(2n)!}$

119 $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^2}{n^n}$

120 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}$

121 $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$

122 $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{n!}}{(n^n)!}$

123 $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n!}}{(2^n)!}$

124 $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)!}{n^{n^n}}$

Usando tutti gli argomenti trattati fino ad ora confrontare l'ordine di infinito delle seguenti successioni:

125 $a_n = \left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2}, \quad b_n = 4^n, \quad c_n = 9^n$

126 $a_n = (n^2)!, \quad b_n = (n!)^2, \quad c_n = n^{2n}$

127 $a_n = n^{n+1}, \quad b_n = (n+1)^n, \quad c_n = (n!)^2$

128 $a_n = n^n, \quad b_n = (n!)^2, \quad c_n = 2^{n^2}$

129 $a_n = 2^{2^n}, \quad b_n = n^{n^2}, \quad c_n = (n!)^n$

130 $a_n = 2^{\sqrt{n}}, \quad b_n = \sqrt{2^n}, \quad c_n = n^{\sqrt{n}}$

131 $a_n = n^{\ln n}, \quad b_n = (\ln n)^n, \quad c_n = n^{\sqrt{n}}$

132 $a_n = (n^n)^{n!}, \quad b_n = (n!)^{n^n}, \quad c_n = 2^{(n!)^2}$

133 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3}, \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n^3}, \quad c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n-1)^3}, \quad d_n = e^{n^2}$

Calcolare $\liminf_{n\to+\infty} a_n$ e $\limsup_{n\to+\infty} a_n$ nei seguenti casi:

134 $a_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^n$

135 $a_n = \left(1+\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n}\right)^n$

136 $a_n = \left(1+\frac{\sin n}{n}\right)^n$

137 $a_n = \sqrt{n}\sin n$

138 $a_n = \left(\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor\right)^{\sqrt{n}}$

139 $a_n = \sqrt{n}\left(\sin\sqrt{n}\right)^2$

Dimostrare le seguenti affermazioni:

140 Se $a_n \to +\infty$ allora $\sqrt{a_n + o(a_n)} \approx \sqrt{a_n}$.

141 Se $a_n \to +\infty$ ed $a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ allora $\log_a(a_n + o(a_n)) \approx \log_a(a_n)$.

142 Data $a_n \to +\infty$, non è necessariamente vero che $e^{a_n + o(a_n)} \approx e^{a_n}$.

143 Teorema del rapporto (T. **36**).

144 Teorema del confronto di rapporti (T. **37**).

145 Date (a_n) e (b_n) si ha $\liminf\limits_{n\to+\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to+\infty} b_n \leq \liminf\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n)$

146 Se (a_n) è limitata allora l'insieme dei suoi punti limite è compatto.

---

10. Questiti

1 Date $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n^2 \ln n}$ e $b_n = \dfrac{1}{n^3}$. Quali delle seguenti affermazioni sono corrette?
(a) frequentemente in n si ha $a_n < b_n$;
(b) definitivamente in n si ha $a_n < b_n$;
(c) frequentemente in n si ha $a_n > b_n$.

$\boxed{\text{A}}$ tutte $\boxed{\text{B}}$ solo **(a)** e **(c)** $\boxed{\text{C}}$ solo **(a)** $\boxed{\text{D}}$ nessuna $\boxed{\text{E}}$ solo **(c)** $\boxed{\text{F}}$ solo **(a)** e **(b)**

---

2 Dire: *"Esiste $\epsilon > 0$ tale che, frequentemente in n, si ha $|a_n| > \epsilon$"* equivale a dire:

$\boxed{\text{A}}$ a_n non è infinitesima $\boxed{\text{B}}$ a_n non ha limite finito $\boxed{\text{C}}$ a_n non ha limite, né finito né infinito $\boxed{\text{D}}$ $|a_n| \to +\infty$ $\boxed{\text{E}}$ a_n non è limitata $\boxed{\text{F}}$ $a_n \to +\infty$

---

3 Date (a_n), (b_n) e (c_n) definite da $a_n = 3^{2n+1}$, $b_n = 6^{n+3}$ e $c_n = 9^{n-1}$, si ha:

$\boxed{\text{A}}$ $c_n = o(b_n)$ e $b_n = o(a_n)$ $\boxed{\text{B}}$ a_n, b_n e c_n hanno lo stesso ordine $\boxed{\text{C}}$ $a_n = o(b_n)$ e $b_n = o(c_n)$ $\boxed{\text{D}}$ a_n e b_n hanno lo stesso ordine e $b_n = o(c_n)$ $\boxed{\text{E}}$ a_n e c_n hanno lo stesso ordine e $b_n = o(a_n)$ $\boxed{\text{F}}$ b_n e c_n hanno lo stesso ordine e $b_n = o(a_n)$

---

4 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!+1) + 2\left(n \cdot \sqrt[n]{2}\right)^{\ln n}}{9\ln\left(e^{n^3} + n!\right) + 5n^{\ln n}} =$ $\boxed{\text{A}}$ $\dfrac{2}{5}$ $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{2}{9}$ $\boxed{\text{C}}$ $+\infty$ $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{9}$ $\boxed{\text{E}}$ 0 $\boxed{\text{F}}$ $\dfrac{1}{5}$
