6. Esercizi

Scrivere in modo formale il significato delle locuzioni seguenti e della loro negazione:

1 $\lim_{x\to 5} f(x) = 11$

2 $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

3 $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -3$

4 $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

5 $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 5$

6 $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$

Verificare direttamente, usando solo la definizione di limite, che si ha:

7 $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$

8 $\lim_{x\to \frac{3}{2}\pi} \sin x = -1$

9 $\lim_{x\to -\infty} 2^x = 0$

10 $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$

11 $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1$

12 $\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$

13 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

14 $\lim_{x\to 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

15 $\lim_{x\to 5^-} x - \lfloor x \rfloor = 1$

Utilizzando il Teorema Ponte, mostrare che i seguenti limiti non esistono:

16 $\lim_{x\to +\infty} \sin x$

17 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

18 $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$

19 $\lim_{x\to 0^+} \cos \frac{1}{x}$

20 $\lim_{x\to +\infty} \sin\left(x^2+1\right)$

21 $\lim_{x\to +\infty} x - \lfloor x \rfloor$

22 $\lim_{x\to 17} x - \lfloor x \rfloor$

23 $\lim_{x\to +\infty} (x - \lfloor x \rfloor)^{\lfloor x \rfloor}$

24 $\lim_{x\to +\infty} (-1)^{\lfloor 2\sqrt{x} \rfloor}$

25 $\lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^x$

26 $\lim_{x\to +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{x}\right)$

Calcolare i seguenti limiti:

27 $\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{\sin x} - 1\right)\tan x}{1 - \cos x}$

28 $\lim_{x\to 0} \frac{\left(e^{5x^2} - 1\right)\ln^2(1+3x)}{1 - \cos x^2}$

29 $\lim_{x\to 0} \frac{(4^x - 1)\log_2(\cos x)}{\sqrt[9]{1+9x^3} - 1}$

30 $\lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt[9]{\cos 6x} - 1\right)\arctan x}{\left(e^{\cos x} - e\right)\ln(1+\sin x)}$

31 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\pi - 2\arctan \frac{1}{x^3}}{\tan 2x - \sin 2x}$

32 $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sqrt{1 - \cos x}}$

33 $\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{5x^2} - 1}{(1+3x)^{4x^2} - 1}$

34 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)\ln(2 - \cos x)}{x(\tan x - \sin x)}$

35 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\sin x} - 1}{\sqrt[3]{\cos x} - 1}$

36 $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin x)^{\sin x} - 1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)}}$

37 $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\cos x)^{\cos x} - 1}{(\sin x)^{\sin x} - 1}$

38 $\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sin 2x)^{\sin x} - 1}{(\sin x)^{\sin 2x} - 1}$

39 $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

40 $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{\sin 2x}$

41 $\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{\ln(2+\cos x)}$

42 $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

43 $\lim_{x\to e} \frac{x-e}{1-\ln x}$

44 $\lim_{x\to\pi} \frac{\tan x + \sin x}{\left(\sqrt{\frac{x}{\pi}} - 1\right)^3}$

45 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan x^8}{\sqrt[9]{1+x^9} - x}$

46 $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$

47 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$

48 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+e^{2x}\right)}{e^{2x}}$

49 $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \cos x}{x^2}$

50 $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+\sin x} - \cos\sqrt{x}}{x}$

51 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x^2\right) + \ln^2(1-x)}{x^2}$

52 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - \cos x^2 + \ln\left(1+x^6\right)}{\tan x - \sin x}$

53 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x^2}$

54 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x+2}{x+1}} - \sqrt[4]{\frac{x+5}{x+3}}}{\ln(x+11) - \ln(x+7)}$

55 $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + e^x}{\ln\left(1+x^2\right) + x^2}$

56 $\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+e^x) + \ln(1+e^{-x})}{\sqrt{1+x^2} - x}$

57 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\sin\frac{1}{x^2}\right) + |\sin(\sin x)|^x}{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}$

58 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x^x) + |x|^{\sin(\sin x)}}{x + \arctan x}$

59 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x - x^{\cos\frac{1}{\sqrt{x}}} - \ln x}{\ln(3+\sqrt{x})}$

60 $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{\pi}{2}} - x^{\arctan x} - \ln\left(1 + x^{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}}$

Ricordando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$, dimostrare che:

61 $\tan x = x + O\left(x^3\right)$

62 $\sin x = x + O\left(x^3\right)$

63 $\arctan x = x + O\left(x^3\right)$

Usando, se necessario, gli esercizi **61**, **62** e **63**, calcolare i seguenti limiti:

64 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^2 - \sin^2 x}{x^3}$

65 $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x^3 - \arctan^3 x}{x^4}$

66 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x+x^2\right) - \sin x}{x^2}$

67 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan\left(x+x^2\right) - \tan x}{x^2}$

68 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(x+x^3\right) - \sin x}{x^3}$

69 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan\left(x+x^3\right) - \tan x}{x^3}$

Calcolare i seguenti limiti, eventualmente al variare del parametro $\alpha > 0$ che vi dovesse comparire:

70 $\lim_{x\to+\infty} x\sin\left(\ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)\right)$

71 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}$

72 $\lim_{x\to0^-} \frac{\pi+2\arctan\frac{1}{x}}{e^x-\sqrt{1+x}}$

73 $\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{1+\sin\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}\right)$

74 $\lim_{x\to0} (1+\arctan 2x)^{\frac{3+\sin x}{x}}$

75 $\lim_{x\to0} (1+|x|)^{\frac{1}{x}}$

76 $\lim_{x\to0} \left(\frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

77 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$

78 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x}$

79 $\lim_{x\to e} (\ln x)^{\ln|x-e|}$

80 $\lim_{x\to e} (\ln x)^{\frac{1}{\ln^3(\ln x)}}$

81 $\lim_{x\to e} (\ln x)^{\frac{1}{\ln^4(\ln x)}}$

82 $\lim_{x\to0^+} x^{-\frac{1}{x}}$

83 $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

84 $\lim_{x\to+\infty} |\sin x|^x$

85 $\lim_{x\to+\infty} |\sin(\sin x)|^x$

86 $\lim_{x\to0^+} \left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

87 $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\sin\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$

88 $\lim_{x\to0^+} \frac{x^\alpha}{e^x-\sin\frac{1}{x}}$

89 $\lim_{x\to0^+} \frac{\alpha+\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}{x}$

90 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$

91 $\lim_{x\to0^+} \left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \sin x$

92 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\lfloor x\rfloor}-\lfloor\sqrt{x}\rfloor}{\ln(\ln x)}$

93 $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lfloor x^2\rfloor-(\lfloor x\rfloor)^2}{x^\alpha}$

Utilizzando, se necessario, quanto appreso sui limiti di funzioni, calcolare i seguenti limiti di successioni, eventualmente al variare del parametro $\alpha > 0$ che vi dovesse comparire:

94 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$

95 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$

96 $\lim_{n\to+\infty} \ln(1+n^n)\ln\left(1+e^{-n}\right)$

97 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{\cos\frac{1}{n}}-1}{\tan\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}$

98 $\lim_{n\to+\infty} n^6\left(\tan\frac{1}{n^2}-\sin\frac{1}{n^2}\right)$

99 $\lim_{n\to+\infty} n^3\left(\tan\frac{1}{n^2}-\sin^2\frac{1}{n}\right)$

100 $\lim_{n\to+\infty} n^2\left(\sqrt[n^2]{e}-\sqrt[3]{\frac{n^2-1}{n^2}}+\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right)$

101 $\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}\right)$

102 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{(2n)!}\right)\ln\left(1+e^{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n^{2n}}\right)\cos\left(\pi n!\right)}$

103 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n}}$

104 $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}\left(\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{\sin\frac{1}{n}}-1\right)$

105 $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha n}\left(\cos\frac{1}{n!}-\frac{2}{\pi}\arctan n^{\alpha n}\right)$

In ciascuno dei casi che seguono confrontare tra loro f, g ed h per x che tende al valore indicato a fianco. Per *"confrontare"* si intende: riconoscere chi è o-piccolo (o-grande) di chi e dire se vi sono funzioni che hanno stesso ordine o sono asintoticamente equivalenti.

106 $f(x)=x^x-e^x,\quad g(x)=x^{x^2}-e^x,\quad h(x)=x^x-e^{x^2},\qquad (x\to 0^+)$

107 $f(x)=e^{x^5}+\left(x^2\right)^{x^2},\quad g(x)=e^{\left(\ln x^2\right)^{\ln x^2}},\quad h(x)=e^{x^4},\qquad (x\to-\infty)$

108 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2},\quad g(x)=\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x^2}{(1+x)^{-x}},\quad h(x)=(100x)^{\frac{x}{\ln x}},\quad (x\to+\infty)$

109
$$f(x)=(\cos x)^{\sin x}-1$$
$$g(x)=(\tan x)^{\sin x}-(\sin x)^{\tan x}$$
$$h(x)=\tan(\tan x)-\sin(\sin x)$$
$$(\text{per } x\to 0^+)$$

110
$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{8x^2+\ln x}{x^2+1}}-2$$
$$g(x)=\ln\left(1+x^x\right)+\frac{\left(x-x^3\right)\ln x}{x^2+1}$$
$$h(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{x}\right)^{\ln x}-x^{\ln x}}{x^{100}+x^{\ln x}}$$
$$(\text{per } x\to+\infty)$$

Dire se le seguenti funzioni sono continue e, in caso non lo siano, determinarne i punti di discontinuità, specificandone il tipo:

111 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$

112 $f(x)=\frac{1}{x}$

113 $f(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

114 $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x}$

115 $f(x) = \begin{cases} \arctan \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 2015 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

116 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sin \pi x} & \text{se } x \notin \mathbf{Z} \\ \dfrac{1}{\pi} & \text{se } x \in \mathbf{Z} \end{cases}$

117 $f(x) = \begin{cases} (-x)^x & \text{se } x < 0 \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

118 $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$

119 $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbf{Q} \\ -x & \text{se } x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$

120 $f(x) = \lfloor x \rfloor$

121 $f(x) = \sin \lfloor x \rfloor$

122 $f(x) = \lfloor \sin x \rfloor$

123 $f(x) = \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$

124 $f(x) = \dfrac{1}{\lfloor x \rfloor + 1 - x}$

125 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

126 $f(x) = \begin{cases} \sin \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

127 $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 2k+1 \text{ con } k \in \mathbf{Z} \\ \left(x - 2\left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor - 1\right) \tan\left(\dfrac{\pi}{2} x\right) & \text{altrimenti} \end{cases}$

128 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{se } x = \pm \dfrac{p}{q}, \text{ con } p, q \in \mathbf{N} - \{0\} \text{ e primi tra loro} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Dire, motivando la risposta, se le seguenti funzioni sono uniformemente continue sul loro dominio naturale:

129 $f(x) = \ln(2 + \sin x)$

130 $f(x) = \dfrac{1}{|x|}$

131 $f(x) = \arctan \dfrac{1}{|x|}$

132 $f(x) = \sqrt{x}$

133 $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$

134 $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$

135 $f(x) = \ln\left(1 + |x|^{|x|}\right)$

136 $f(x) = \sin x + \sin(\pi x)$

137 $f(x) = x \sin x$

138 $f(x) = \dfrac{1}{3 + \sin x + \sin(\pi x)}$

139 $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x + e^{-x^2}}$

140 $f(x) = \sin x^2$