OSS. 1 (RELAZIONE TRA CR. DEL RAPPORTO E CR. DELLA RADICE)

DATA $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, A TERMINI STRETTAMENTE POSITIVI, LA CONDIZIONE $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$ È PIÙ FORTE DELLA CONDIZIONE $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$. INFATTI SI HA:

1. SE $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell \geq 0$ ALLORA ANCHE $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$
2. ESISTONO CASI DI (a_n) TALI CHE $\sqrt[n]{a_n} \to \ell \geq 0$ MA $\frac{a_{n+1}}{a_n} \not\to \ell$.

DIM

1. BISOGNA MOSTRARE CHE:

(1) $$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{DEFINITIVAMENTE IN } n \quad \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$$

DIMOSTRIAMO PRIMA LA DISUGUAGLIANZA $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$

A TALE SCOPO, SIA $n_0 \in \mathbb{N}$ TALE CHE:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{PER } n \geq n_0$$

PER $n > n_0$ SI HA:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_{n_0} \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} <$$

$$< \sqrt[n]{a_{n_0} \cdot \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0}} = \sqrt[n]{a_{n_0}} \cdot \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{n_0}{n}} \xrightarrow{\text{PER } n\to+\infty} \ell + \frac{\varepsilon}{2}$$

DI CONSEGUENZA, DEFINITIVAMENTE IN n $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \ell + \varepsilon$.

IN MODO DEL TUTTO ANALOGO SI DIMOSTRA CHE DEFINITIVAMENTE IN n SI HA $\sqrt[n]{a_n} > \ell - \varepsilon$, AVENDO CURA DI SCEGLIERE $\varepsilon > 0$ IN MODO CHE $\ell - \varepsilon > 0$ (IN PARTICOLARE SE $\ell = 0$ QUESTA SECONDA DISUGUAGLIANZA È GRATIS.)

QUINDI VALE (1).

2. PRENDIAMO $a_n = \left(\rho + \frac{1+(-1)^n}{2n}\rho\right)^n$, CIOÈ:

$$a_n = \begin{cases} \rho^n & \text{SE } n \text{ È DISPARI} \\ \left(\rho + \frac{\rho}{n}\right)^n & \text{SE } n \text{ È PARI} \end{cases}$$

CHIARAMENTE SI HA:

$$\sqrt[n]{a_n} = \rho + \frac{1+(-1)^n}{2n}\rho \to \rho$$

PER $n \to +\infty$.

INVECE IL LIMITE DI $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ NON ESISTE PERCHÉ:

$$\frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} = \frac{\left(\rho + \frac{\rho}{2k}\right)^{2k}}{\rho^{2k-1}} = \rho \cdot \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k} \to \rho \cdot e$$

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{\rho^{2k+1}}{\left(\rho + \frac{\rho}{2k}\right)^{2k}} = \frac{\rho}{\left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}} \to \frac{\rho}{e}$$