Metodi Matematici - Lista n. 1(bis)

Quesiti di Analisi Funzionale (Livello Zero)

Titolo nota

www.problemisvolti.it

1) Dire in quale dei seguenti casi $(\,,\,)$ è un prodotto scalare in $L^2([-\pi,\pi])$:

a) $(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$

b) $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)\,g(x)|\,dx$

c) $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f^3(x)\,g^3(x)\,dx$

d) $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} \chi_{[-1,1]}(x)\,f(x)\,g(x)\,dx$

e) $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} (x^3+x)f(x)g(x)\,dx$

f) $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} (1+x^2)f(x)g(x)\,dx$

2) Nei casi del problema 1 in cui $(\,,\,)$ è un prodotto scalare, dire se la norma da esso indotta è equivalente alla norma indotta dal prodotto scalare canonico.

3) Nei casi del problema 1 in cui $(\,,\,)$ è un prodotto scalare, dire se $(f,g)=0 \iff \langle f,g\rangle=0$, dove $\langle\,,\,\rangle$ il prodotto scalare canonico.

4) Dato $H=L^2([-\pi,\pi])$ e $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} x^2 f(x)\,g(x)\,dx$, mostrare che:

1) $(\,,\,)$ è un prodotto scalare in H.
2) Non è vero che $(f,g)=0 \iff \langle f,g\rangle=0$
3) $\|\cdot\|_{(\,,\,)}$ non è equivalente a $\|\cdot\|_2$.
4) H non è completo con $\|\cdot\|_{(\,,\,)}$.

Trovare inoltre uno spazio W, contenente H, e che sia completo con $\|\cdot\|_{(\,,\,)}$.

5) Dato $H=\ell^2$, per ogni $\bar{a}=(a_n)$ e $\bar{b}=(b_n)$ in H definiamo $(\bar{a},\bar{b})=\sum_{n=0}^{+\infty}(2+(-1)^n)\,a_n b_n$.

Dimostrare che:

1) $(\,,\,)$ è un prodotto scalare in H.
2) $\|\cdot\|_{(\,,\,)}$ è equivalente alla usuale norma di H.

6) Dato $H=\ell^2$, per ogni $\bar{a}=(a_n)$ e $\bar{b}=(b_n)$ in H definiamo $(\bar{a},\bar{b})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}a_n b_n$.

Dimostrare che:

1) $(\,,\,)$ è un prodotto scalare su H.

2) $\|\cdot\|_{(\,,\,)}$ non è equivalente alla usuale norma di H.

3) H non è completo rispetto a $\|\cdot\|_{(\,,\,)}$.

Trovare inoltre uno spazio W, contenente H, che sia completo rispetto a $\|\cdot\|_{(\,,\,)}$.

7) Come il problema 6 ma definendo $(\bar{a},\bar{b})=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{2}+\frac{1}{n+1}\right)a_n b_n$.

8) Sia $H=\ell^2$ e sia $(\gamma_n)\in\ell^\infty$. Per ogni $\bar{a}=(a_n)\in H$ e $\bar{b}=(b_n)\in H$ definiamo $(\bar{a},\bar{b})=\sum_{n=0}^{+\infty}\gamma_n a_n b_n$. Dire come deve essere (γ_n) se vogliamo che:

a) $(\,,\,)$ sia un prodotto scalare su H tale che $\|\cdot\|_{(\,,\,)}$ sia equivalente a $\|\cdot\|_2$

b) $(\,,\,)$ sia un prodotto scalare su H tale che $\|\cdot\|_{(\,,\,)}$ non sia equivalente a $\|\cdot\|_2$

9) Sia $H=\ell^2$ con la norma indotta dal prodotto scalare canonico. Dire quali dei seguenti sottospazi sono densi e/o chiusi:

a) $W=\{(a_n)\in H \mid a_0=a_1=a_2=0\}$

b) $W=\ell^1$

c) $W=\{(a)_n\in H \mid \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}a_n=0\}$

d) $W=\{(a_n)\in H \mid \sum_{n=0}^{+\infty}a_n=0\}$

e) $W=\{(a_n)\in H \mid a_{2k}=0 \ \forall k\in\mathbb{N}\}$

f) $W=\{(a_n)\in H \mid a_n=o\left(\frac{1}{n^3}\right) \text{ per } n\to+\infty\}$

g) $W=\{(a_n)\in H \mid a_n=\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \text{ per } n\to+\infty\}$

h) $W=\{(a_n)\in H \mid a_0+a_1+a_2=0\}$

10) Esibire un sottospazio denso in ℓ^2 che non contenga alcun elemento della base di Hilbert canonica.

11) Per ciascuno dei casi del problema 9 trovare $W^\perp$.