Metodi Matematici - Lista n. 2

Quesiti su Serie di Fourier e proiezioni in L^2

Titolo nota

www.problemisvolti.it

1) Data $f:(-a,a)\to\mathbb{R}$ definiamo $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ e $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Mostrare che:

a) $g(x)$ è pari, $h(x)$ è dispari e si ha $f(x)=g(x)+h(x)$;

b) quello descritto al punto (a) è l'unico modo di scrivere $f(x)$ come somma di una funzione pari e una funzione dispari.

2) Sia $V=C([-1,1])$ con il solito prodotto scalare $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ e sia $H=\{f\in V \mid f \text{ è pari}\}$. Determinare $H^\perp$.

3) Caratterizzare le funzioni pari e le funzioni dispari in $C([-\pi,\pi])$ attraverso le proprietà della loro serie di Fourier.

Trovare la serie di Fourier della restrizione a $[-\pi,\pi]$ delle $f(x)$ seguenti:

4) $f(x)=x$

5) $f(x)=|x|$

6) $f(x)=\operatorname{sgn} x$

7) $f(x)=x^2$

8) $f(x)=e^x$

9) $f(x)=\operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

10) $f(x)=\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

11) $f(x)=|\sin x|$

12) $f(x)=\max\{\sin x, 0\}$

Calcolare $\sum a_n$ seguendo il suggerimento indicato a fianco nei seguenti casi:

13) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ [SUGGERIMENTO: applicare l'identità di Parseval alla serie di Fourier di $f(x)=x$]

14) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ [SUGGERIMENTO: sfruttare la convergenza per $x=0$ o per $x=\pi$ della serie di Fourier di $f(x)=|x|$]

15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ [SUGGERIMENTO: applicare l'identità di Parseval alla serie di Fourier di $f(x)=x^2$]

16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$ [SUGGERIMENTO: applicare l'identità di Parseval alla serie di Fourier di $f(x)=|x|$]

17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ [SUGGERIMENTO: sfruttare la convergenza per $x=\frac{\pi}{2}$ della serie di Fourier di $f(x)=x$]

18) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ [SUGGERIMENTO: sfruttare la convergenza per $x=0$ della serie di Fourier di $f(x)=x^2$]

Per le $f(x)$ indicate in seguito calcolare la serie di Fourier della loro restrizione all'intervallo indicato a fianco:

19) $f(x)=x$ ristretta a $[-4,4]$

20) $f(x)=|x|$ ristretta a $[-1,1]$

21) $f(x)=x^2$ ristretta a $[-2,2]$

22) $f(x)=x\cdot|x|$ ristretta a $[-2,2]$

23) Siano $V=C([-1,1])$, $H=\{g\in V \mid g \text{ è un polinomio di grado } \leq 2\}$ e $f(x)=x^3$. Dopo aver trovato una base ortonormale di H, trovare la proiezione di $f(x)$ su H e la distanza tra f e H.

24) Siano $V=C([-1,1])$ e $B=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}\subset V$. Trovare un $\mathcal{B}\subset V$ che sia un insieme ortonormale e tale che $\mathrm{span}(B)=\mathrm{span}(\mathcal{B})$.

25) Come (23) ma con $V=C([0,1])$.

26) Sia $V=\ell^2$, come definito nel problema (12) della lista 1.

a) Trovare una base di Hilbert per V.

b) Mostrare che $B=\{x\in V \mid \|x\|\leq 1\}$ è chiuso e limitato ma non compatto.

c) Esibire un compatto $K\subset V$ tale che $\mathrm{span}(K)$ non abbia dimensione finita.