Metodi Matematici - Lista n. 3

Quesiti su Corda vibrante con e senza serie di Fourier

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Utilizzando le serie di Fourier, trovare la soluzione $u(t,x)$ dei seguenti problemi:

1) $$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) & \text{con } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\pi] \\ u(0,x) = \sin(5x) \\ u_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) & \text{con } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\pi] \\ u(0,x) = 0 \\ u_t(0,x) = \sin(5x) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) & \text{con } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\pi] \\ u(0,x) = \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right| \\ u_t(0,x) = 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

Usando la formula esplicita (formula di D'Alembert) trovare $u(t,x)$ che risolve

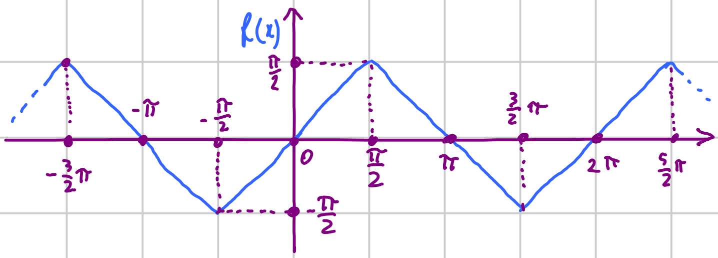
$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) & \text{con } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) \\ u_t(0,x) = g(x) \end{cases}$$

nei seguenti casi:

4) $f(x) = \sin(5x)$ e $g(x) = 0$

5) $f(x) = 0$ e $g(x) = \sin(5x)$

6) $g(x) = 0$ e $f(x)$ avente grafico:



7) Sia $u(t,x) \in C^2(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ tale che $u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x)$ per ogni $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Detta $f(x) = u(0,x)$, come bisogna scegliere $g(x) = u_t(0,x)$ se si vuole che $u(t,x)$ sia della forma $f(x-ct)$, oppure $f(x+ct)$.

8) Trovare la formula per la soluzione $u(t,x)$ del problema:

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) & \text{con } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ u(0,x) = f(x) \in C^2_0((0,+\infty)) = \{h \in C^2((0,+\infty)) \mid \text{supporto di } f \text{ è compatto}\} \\ u_t(0,x) = g(x) \in C^1_0((0,+\infty)) = \{h \in C^1((0,+\infty)) \mid \text{supporto di } f \text{ è compatto}\} \\ u(t,0) = 0 \end{cases}$$

9) Siano $f(x)$ e $g(x)$ nel problema (8) tali che esiste $t_0 > 0$ tale che per ogni $t \in [0, t_0]$ si abbia $u(t,x) = f(x+ct)$. Mostrare che esiste $t_1 > t_0$ tale che se $t \geq t_1$ si ha $u(t,x) = -f(-(x-ct))$.

10) Mostrare che se $u(t,x)$ soddisfa l'equazione delle onde, allora anche $u(-t,x)$ la soddisfa.

Usando le serie di Fourier risolvere il problema

$$\begin{cases} u_{tt}(t,x) = c^2 u_{xx}(t,x) + F(t,x) & \text{con } (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times [0,\pi] \\ u(0,x) = f(x) \\ u_t(0,x) = g(x) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \end{cases}$$

nei seguenti casi:

11) $f(x) = \sin(5x)$, $g(x) = 0$, $F(t,x) = e^{-t} \sin(3x)$

12) $f(x) = 0$, $g(x) = \sin(5x)$, $F(t,x) = \dfrac{\sin x}{1 + \cos^2 t}$

13) Risolvere (11) e (12) ricorrendo alla formula esplicita nel caso $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.