

Metodi Matematici - Lista n. 5

Quesiti su: **Distribuzioni**

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Verificare che le seguenti $T: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ sono delle distribuzioni e determinarne supporto e ordine e infine calcolarne la derivata.

$$1) T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$2) T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x^2} \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$3) T(\varphi) = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$4) T(\varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(k) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$5) T(\varphi) = \sum_{k=0}^n \varphi^{(k)}(k) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$6) T(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

$$7) T(\varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(\frac{1}{n}) - \varphi(0)}{n} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

8) Mostrare che T del punto (4) è periodica.

9) Mostrare che T del punto (6) è dispari.

10) Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mostrare che $(T \text{ pari}) \Rightarrow (T' \text{ dispari})$ e che $(T \text{ dispari}) \Rightarrow (T' \text{ pari})$.

11) Mostrare che se $T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ allora $(\alpha T_1 + \beta T_2)' = \alpha T_1' + \beta T_2'$.

- 12) Mostrare che se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ allora $(fT)' = f'T + fT'$.
- 13) Date $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mostrare che $\left((T, \varphi) = 0 \right) \Rightarrow T(\varphi) = 0$.
- 14) Per ogni $k \in \mathbb{N}$ calcolare $\left(\frac{d}{dx} \right)^{(k)} (|x|)$.
- 15) Trovare tutte le $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tali che $T' = \delta_0$, dove δ_0 è la delta di Dirac in 0, cioè $\delta(\varphi) = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.
- 16) Trovare tutte le $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tali che $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad T'(\varphi) = \varphi''(0)$.
- 17) Sia $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tale che $xT = 0$.
- Dire chi è il supporto di T .
 - Trovare tutte le T di ordine 0 che soddisfano la condizione richiesta.