Metodi Matematici - Prova Simulata n. 1

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Trovare, motivando la risposta, $\lim_{a \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+(ax)^4} + \frac{1}{1+(x+a)^2} \right) dx$.

2) a) Trovare $\hat{f}(\lambda)$ sapendo che $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

b) Trovare $g(x)$ sapendo $\hat{g}(\lambda) = \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^2}$.

3) Sia δ_0 la delta di Dirac in 0 e sia $T = \left((x+1)^2 \delta_0\right)'$

a) dire se T è una distribuzione temperata.

b) calcolare $T\left(e^{-x^2}\right)$ e $T\left(\frac{x}{1+e^{x^2}}\right)$

c) Qual è il supporto di T ?

Motivare le affermazioni.

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) Mostrare come si ricava la formula per la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-ax^2}$, dove $a > 0$.

2) Trovare, motivando la risposta, tutte le distribuzioni T tali che $T' = 0$.

3) Data (f_n) successione in $C([-1,1])$ dire, motivando la risposta, quale delle seguenti condizioni è più forte: a) $f_n \xrightarrow{L^2} 0$

b) $f_n \xrightarrow{L^1} 0$.

P.1 Osserviamo che per ogni fissato $a>0$, per $x \to \pm\infty$ si ha:

$$\frac{1}{1+(ax)^4} \approx \frac{1}{a^4 x^4} \quad e \quad \frac{1}{1+(x+a)^2} \approx \frac{1}{x^2}$$

Di conseguenza, per ogni fissato $a>0$, sono entrambi convergenti i due integrali $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(ax)^4}\,dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x+a)^2}\,dx$, quindi posso scrivere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(ax)^4} + \frac{1}{1+(x+a)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(ax)^4}\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x+a)^2}\,dx .$$

Basterà quindi calcolare separatamente il limite dei 2 pezzi.

Visto che cerchiamo il limite per $a \to +\infty$, possiamo sempre supporre, nei calcoli che seguiranno, che sia $a>1$.

I PEZZO Osserviamo che, per ogni $a>1$, si ha $\left|\frac{1}{1+(ax)^4}\right| = \frac{1}{1+(ax)^4} \leq \frac{1}{1+x^4}$.

Poichè $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$ converge, possiamo applicare il teorema della convergenza dominata e passare al limite sotto il segno di integrale, ottenendo:

$$\lim_{a \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(ax)^4}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lim_{a\to+\infty} \frac{1}{1+(ax)^4} \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 0 \; dx = 0$$

II PEZZO Osserviamo che il grafico di $\frac{1}{1+(x+a)^2}$ si ottiene traslando orizzontalmente di $-a$ il grafico di $\frac{1}{1+x^2}$, quindi, per ogni fissato $a>0$ si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x+a)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$$

Di conseguenza anche:

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x+a)^2}\,dx = \pi$$

Possiamo quindi concludere e dire che:

$$\lim_{a\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(ax)^4} + \frac{1}{1+(x+a)^2}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(ax)^4}\,dx + \lim_{a\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(x+a)^2}\,dx = 0 + \pi = \pi$$

Si noti che se fossimo (erroneamente!) passati al limite sotto il segno di integrale anche nel II pezzo, avremmo ottenuto zero (sbagliando!). In tal caso, infatti non è possibile soddisfare le ipotesi del teorema della convergenza dominata, visto che non esiste alcuna $f(x)$ sommabile tale che $\frac{1}{1+(x+a)^2} \leq f(x)$ per ogni $a>0$. Di conseguenza non abbiamo alcuna garanzia che, passando al limite sotto il segno di integrale, il risultato non cambi.

P.2 **a** Posto $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ si ha:

$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2} = \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2}\right)' = -\frac{1}{2} h'(x)$$

quindi:

$$\hat{f}(\lambda) = -\frac{1}{2}(i\lambda)\hat{h}(\lambda) = -\frac{1}{2} i\lambda \cdot \pi e^{-|\lambda|} = -i\frac{\pi}{2}\lambda e^{-|\lambda|}.$$

b Applicando la formula di inversione e usando il punto (a) si ha:

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{g}(\lambda)\right)^\wedge(-x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^2}\right)^\wedge(-x) = \frac{1}{2\pi}\left(-i\frac{\pi}{2}(-x)e^{-|-x|}\right) = \frac{ix}{4}e^{-|x|}$$

P.3 Poniamo $T_1 = (1+x)^2\delta_0$ cosicché $T = T_1'$. Osserviamo che per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ si ha:

$$T_1(\varphi) = \delta_0\left((1+x)^2\varphi(x)\right) = (1+0)^2\varphi(0) = \varphi(0)$$

e quindi anche:

$$T(\varphi) = T_1'(\varphi) = -T_1(\varphi') = -\varphi'(0)$$

Ciò significa che, banalmente, $T_1 = \delta_0$ e $T = \delta_0'$, quindi ci è già noto che T è una distribuzione temperata e che il suo supporto è $\{0\}$. Questo risponde ad (a) e (c).

Per il punto (b) si ha:

$$T(e^{-x^2}) = -e^{-x^2}\cdot(-2x)\Big|_{x=0} = -e^{-0^2}\cdot(-2\cdot 0) = 0$$

$$T\left(\frac{x}{1+e^{x^2}}\right) = -\frac{1+e^{x^2} - x e^{x^2}\cdot 2x}{(1+e^{x^2})^2}\Bigg|_{x=0} = -\frac{1+e^0 - 0\cdot e^0\cdot 2\cdot 0}{(1+e^0)^2} = -\frac{1}{2}$$