Metodi Matematici - Prova Simulata n. 2

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Trovare, motivando la risposta, il polinomio di grado ≤ 3 che meglio approssima $f(x) = \text{sgn}(x)$ in $L^2((-1,1))$.

2) Sapendo che $\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{1+\lambda^8}$ calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(x)\, dx$.

3) Sia $f(x) = \sqrt{|x|}$. Trovare la sua derivata 2^a nel senso delle distribuzioni.

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) Dimostrare che se $g_1, g_2 \in L^1(\mathbb{R})$ sono entrambe derivate deboli di $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $g_1(x) = g_2(x)$ quasi ovunque.

2) Ricavare, sotto le opportune ipotesi per f e g, la formula $(f * g)^{\wedge}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) \cdot \hat{g}(\lambda)$.

3) Definire chi è lo spazio $\mathcal{D}$ delle funzioni test e dire cosa significa che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$.

P.1 Il polinomio da trovare è la proiezione di $f(x)$ su $\mathrm{Span}\{1, x, x^2, x^3\}$, basterà quindi:

(A) costruire una base ortogonale di $\mathrm{Span}\{1, x, x^2, x^3\}$ utilizzando il metodo di Gram-Schmidt;

(B) proiettare $f(x)$ sulla base trovata utilizzando il teorema della proiezione.

Il calcolo non è molto lungo, tuttavia è istruttivo spendere due parole per vedere come può essere abbreviato. In particolare vogliamo convincerci che, essendo $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ una funzione dispari, proiettarla su $\mathrm{Span}\{1, x, x^2, x^3\}$ è la stessa cosa di proiettarla su $\mathrm{Span}\{x, x^3\}$.

Basta infatti osservare che $\mathrm{Span}\{1, x^2\}$ e $\mathrm{Span}\{x, x^3\}$ sono due sottospazi tra loro perpendicolari, la cui somma diretta è $\mathrm{Span}\{1, x, x^2, x^3\}$.

Essendo $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ una funzione dispari, la sua proiezione su $\mathrm{Span}\{1, x^2\}$ è nulla, quindi basta trovare quella su $\mathrm{Span}\{x, x^3\}$, che è quello che volevamo mostrare.

Per farlo, costruiamo prima una base ortogonale di $\mathrm{Span}\{x, x^3\}$, usando il metodo di Gram-Schmidt.

Poiché:

$$\langle x, x^3 \rangle = \int_{-1}^{1} x^4 \, dx = \frac{2}{5} \qquad e \qquad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{2}{3}$$

come base ortogonale per $\mathrm{Span}\{x, x^3\}$ basta prendere $\{g_1(x), g_2(x)\}$, dove:

$$g_1(x) = x \qquad e \qquad g_2(x) = x^3 - \frac{\langle x^3, x \rangle}{\|x\|^2} x = x^3 - \frac{3}{5} x$$

Proiettiamo ora $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ su $\mathrm{Span}\{x, x^3\}$ usando il teorema della proiezione:

$$\Pi_f = \frac{\langle f(x), g_1(x) \rangle}{\|g_1\|^2} \cdot g_1(x) + \frac{\langle f(x), g_2(x) \rangle}{\|g_2\|^2} \cdot g_2(x)$$

dove:

$$\langle f(x), g_1(x) \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot \mathrm{sgn}(x) \, dx = 2 \int_{0}^{1} x \, dx = 1$$

$$\langle f(x), g_2(x)\rangle = \int_{-1}^{1}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)\operatorname{sgn}(x)\,dx = 2\int_0^1\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)dx = 2\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{10}$$

$$\|g_1\|^2 = \langle x, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$\|g_2\|^2 = \left\langle x^3-\frac{3}{5}x, x^3-\frac{3}{5}x\right\rangle = \int_{-1}^{1}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)^2 dx = 2\int_0^1\left(x^6-\frac{6}{5}x^4+\frac{9}{25}x^2\right)dx =$$

$$= 2\left(\frac{1}{7}-\frac{6}{25}+\frac{3}{25}\right) = \frac{8}{7\cdot 25}$$

Di conseguenza:

$$\Pi_f = \frac{1}{\frac{2}{3}}\cdot x + \frac{-\frac{1}{10}}{\frac{8}{7\cdot 25}}\cdot\left(x^3-\frac{3}{5}x\right) = \frac{3}{2}x - \frac{7\cdot 5}{16}\left(x^3-\frac{3}{5}x\right) = \frac{3}{2}x - \frac{35}{16}x^3 + \frac{21}{16}x = \frac{45}{16}x - \frac{35}{16}x^3$$

che quindi è il polinomio cercato.

P.2 Posto $v(x) = x^2 u(x)$, basterà calcolare $\hat{v}(\lambda)$ dopodiché:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,dx = \hat{v}(0)$$

Osserviamo che $v(x) = x^2 u(x) = -(-ix)^2 u(x)$ e quindi:

$$\hat{v}(\lambda) = -\left(\hat{u}(\lambda)\right)'' = -\left(\frac{1}{1+\lambda^8}\right)'' = \left(\frac{8\lambda^7}{(1+\lambda^8)^2}\right)' = \dots = \frac{8\lambda^6\cdot(7-9\lambda^8)}{(1+\lambda^8)^3}$$

da cui segue $\hat{v}(0) = 0$ e quindi $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 u(x)\,dx = 0$.

P.3 Per prima cosa troviamo $f'(x)$. Osserviamo che $f(x) = \sqrt{|x|}$ è derivabile in senso classico per ogni $x \neq 0$ e la sua derivata è $f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2\sqrt{|x|}}$, che è in L^1_{loc}.
Quindi ci aspettiamo che sia anche la derivata di $f(x)$ nel senso delle distribuzioni, ci aspettiamo cioè che la distribuzione T_f, definita da $T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{|x|}\,\varphi(x)\,dx$ per ogni $\varphi\in\mathcal{D}$, abbia per derivata la distribuzione $T_{f'}$ definita, sempre per ogni $\varphi\in\mathcal{D}$, da $T_{f'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x)}{2\sqrt{|x|}}\varphi(x)\,dx$.
Infatti, per ogni $\varphi\in\mathcal{D}$, preso $a>0$ t.c. $\operatorname{supp}(\varphi)\subset[-a,a]$, si ha:

$$T_f'(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty}\sqrt{|x|}\,\varphi'(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-a}^{-\varepsilon}\sqrt{-x}\,\varphi'(x)\,dx - \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{a}\sqrt{x}\,\varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\left[\sqrt{-x}\,\varphi(x)\right]_{-a}^{-\varepsilon} - \int_{-a}^{-\varepsilon} -\frac{1}{2\sqrt{-x}}\varphi(x)\,dx\right) - \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\left[\sqrt{x}\,\varphi(x)\right]_{\varepsilon}^{a} - \int_{\varepsilon}^{a}\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(x)\,dx\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to0^+}\left(\sqrt{\varepsilon}\,\varphi(-\varepsilon) - \int_{-a}^{-\varepsilon} -\frac{1}{2\sqrt{-x}}\varphi(x)\,dx\right) - \lim_{\varepsilon\to0^+}\left(-\sqrt{\varepsilon}\,\varphi(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{a}\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(x)\,dx\right) =$$

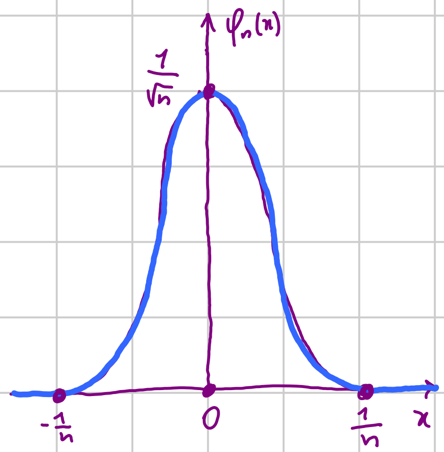
$$= \int_{-a}^{0} -\frac{1}{2\sqrt{-x}}\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{a}\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi(x)\,dx = \int_{-a}^{a}\frac{sgn(x)}{2\sqrt{|x|}}\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sgn(x)}{2\sqrt{|x|}}\varphi(x)\,dx = T_{f'}(\varphi)$$

Troviamo ora $f''(x)$. Si noti che per ogni $x \neq 0$ la derivata classica di $f'(x)$ è $f''(x) = -\frac{1}{4|x|\sqrt{|x|}}$, che però non è in L^1_{loc}, quindi stavolta $T_{f''}$ non è ben definita per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ e, di conseguenza, non può essere presa come derivata seconda della distribuzione T_f.

Ci limitiamo quindi ad esprimere T_f'' solo usando la definizione di derivata di una distribuzione applicata a $T_{f'}$, ovvero come quella distribuzione T_f'' tale che, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, si ha:

$$T_f''(\varphi) = -T_f'(\varphi') = -T_{f'}(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{sgn(x)}{2\sqrt{|x|}}\,\varphi'(x)\,dx$$

In realtà possiamo fare di più (anche se non era richiesto dal quesito): possiamo mostrare che non è possibile trovare nessuna $g(x) \in L^1_{loc}$ tale che $T_f'' = T_g$. Infatti, se così fosse, T_f'' dovrebbe essere di ordine 0, ma così non è perché possiamo trovare una successione (φ_n) in $\mathcal{D}$, tale che $supp(\varphi_n) \subset [-1,1]$ per ogni n, $\|\varphi_n\|_\infty \to 0$ ma $T_f''(\varphi) \not\to 0$.



Basta infatti, per ogni intero positivo n, prendere φ_n funzione pari col grafico del tipo rappresentato nella figura a fianco. Ad esempio una tale φ_n può ottenersi a partire dalla solita funzione a campana φ, con supporto $[-1,1]$, ponendo $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(nx)$

Ovviamente tutte le φ_n così costruite hanno il supporto contenuto in $[-1,1]$ e si ha $\|\varphi_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, tuttavia:

GRAZIE AL FATTO CHE $\varphi_n(x)$ È PARI E QUINDI $\varphi_n'(x)$ DISPARI E INFINE $|\varphi_n'(x)|$ PARI

$$\left|T_f''(\varphi_n)\right| = \left|-T_{f'}'(\varphi_n')\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{2\sqrt{|x|}}\varphi_n'(x)\,dx\right| = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{|\varphi_n'(x)|}{2\sqrt{|x|}}\,dx \overset{\downarrow}{=}$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{|\varphi_n'(x)|}{2\sqrt{x}}\,dx > \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}}\int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi_n'(x)|\,dx = -\sqrt{n}\int_0^{\frac{1}{n}} \varphi_n'(x)\,dx = -\sqrt{n}\cdot\left(0-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$$

GRAZIE ALLA MONOTONIA DI $\sqrt{x}$

GRAZIE AL FATTO CHE PER $x>0$ SI HA $\varphi_n'(x)<0$

Quindi, essendo $\left|T_f''(\varphi_n)\right| > 1$ per ogni n, segue che $T_f''(\varphi_n) \not\to 0$.
Questo dimostra che T_f'' è una distribuzione di ordine almeno 1 e quindi non può essere del tipo T_g con $g \in L^1_{loc}$.