Metodi Matematici - Prova Simulata n. 3

Titolo nota www.problemisvolti.it

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Data $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{per } |x|<1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ trovare $g(x)$ in modo che la soluzione $u(t,x)$ di : $\begin{cases} u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ u(0,x) = f(x) \\ u_t(0,x) = g(x) \end{cases}$ soddisfi: $u(1,x) = f(x-1)$

2) Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+4x+13)^2}$

3) Sia $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, $\varphi \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\, dx$. Mostrare che T è una distribuzione e trovarne il supporto.

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) Enunciare e dimostrare l'identità del parallelogramma.

2) Ricavare, sotto le opportune ipotesi per f, la formula che fornisce $\hat{f}$ in funzione di $f(x)$.

3) Definire chi è lo spazio $\mathcal{S}$ delle funzioni rapidamente decrescenti e dire cosa significa che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$.

P.1 Richiedere che

(1) $$u(1,x) = f(x-1)$$

significa richiedere che la soluzione al tempo $t=1$ si ottenga traslando di 1 (in x) la soluzione al tempo $t=0$.
Ovviamente tale condizione è soddisfatta dall'onda solitaria che viaggia verso destra, cioè dalla soluzione $u(t,x)$ che soddisfa

(2) $$u(t,x) = f(x-t) \qquad \text{per ogni } t \geq 0$$

Che una tale $u(t,x)$ soddisfi l'equazione $u_{tt} = u_{xx}$ si verifica subito facendo i calcoli, così come è immediato che soddisfa la condizione iniziale $u(0,x) = f(x)$.
Per mostrare che il dato corretto per la condizione iniziale $u_t(0,x) = g(x)$ è $g(x) = -f'(x)$ basta derivare rispetto a t ambo i membri della (2) e porre $t=0$.
Abbiamo quindi trovato che scegliendo $g(x) = -f'(x)$, la corrispondente soluzione $u(t,x)$ dell'equazione delle onde soddisfa (2) e quindi, a maggior ragione, anche (1).
Questo completa la richiesta del quesito.
Tuttavia, per amor di completezza, ci si potrebbe chiedere se ci sono altri modi di scegliere $g(x)$.
Vedremo che la risposta è "SI": pur essendo unica la $u(t,x)$ che soddisfa (2), esistono infinite soluzioni $u(t,x)$ dell'equazione delle onde tali che $u(0,x) = f(x)$ e che soddisfano (1). Ciascuna di tali soluzioni ha un dato iniziale $u_t(0,x) = g(x)$ diverso. Vogliamo quindi trovare l'insieme di **tutti** i dati iniziali $u_t(0,x) = g(x) \in C^1(\mathbb{R})$ che accoppiati alla stessa condizione $u(0,x) = f(x)$ danno origine ad una soluzione $u(t,x)$ dell'equazione delle onde che soddisfa (1).

A tale scopo, dette $v(t,x)$ e $w(t,x)$ le soluzioni dei 2 seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} v_{tt}(t,x) = v_{xx}(t,x) \\ v(0,x) = f(x) \\ v_t(0,x) = g_1(x) \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} w_{tt}(t,x) = w_{xx}(t,x) \\ w(0,x) = f(x) \\ w_t(0,x) = g_2(x) \end{cases}$$

ci chiediamo che relazione deve esserci tra $g_1(x)$ e $g_2(x)$ se vogliamo che $v(t,x)$ e $w(t,x)$ oltre che per $t=0$ coincidano anche per $t=1$.

Ricordiamo che le due soluzioni sono date dalle formule:

$$v(t,x) = \frac{1}{2}\big(f(x+t)+f(x-t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g_1(y)\,dy$$

$$w(t,x) = \frac{1}{2}\big(f(x+t)+f(x-t)\big) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g_2(y)\,dy$$

da cui, sottraendo membro a membro, si ottiene:

$$v(t,x) - w(t,x) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\big(g_1(y)-g_2(y)\big)\,dy.$$

Ne segue che $v(t,x)$ e $w(t,x)$ coincidono per $t=1$ se e solo se

$$\int_{x-1}^{x+1}\big(g_1(y)-g_2(y)\big)\,dy = 0 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Posto $h(x) = g_1(x) - g_2(x)$, tale condizione equivale dire che

(3) "$h(x)$ ha integrale nullo su ogni intervallo di lunghezza 2"

Si noti che le $h(x)$ continue che soddisfano (3) sono automaticamente periodiche di periodo 2. Infatti da (3) segue che per ogni $x_0, x \in \mathbb{R}$ con $x > x_0$ si ha:

$$\int_{x_0}^{x} h(y)\,dy = \int_{x_0}^{x+2} h(y)\,dy = \int_{x_0+2}^{x+2} h(y)\,dy$$

PERCHÈ $\displaystyle\int_{x}^{x+2} h(y)\,dy = 0$

PERCHÈ $\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+2} h(y)\,dy = 0$

Quindi:

$$\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} h(y)\,dy = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0+2}^{x+2} h(y)\,dy$$

da cui, passando al limite per $x \to x_0$, si ottiene $h(x_0) = h(x_0+2)$.
Poiché ciò è vero per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, possiamo dire che $h(x)$ è periodica di periodo 2.
Quindi ricordando che $h(x) = g_1(x) - g_2(x)$ possiamo affermare che $v(t,x)$ e $w(t,x)$ coincidono anche per $t=1$ se e solo se $g_1(x) - g_2(x)$ è una funzione periodica di periodo 2 e il cui integrale nel periodo vale 0.
Applicando queste idee al problema di partenza possiamo affermare che le $g(x)$ di classe $C^1(\mathbb{R})$ per le quali $u(t,x)$ verifica (1) sono tutte e sole quelle della forma:

$$g(x) = -f'(x) + h(x)$$

dove $h(x)$ è una qualsiasi funzione di classe C^1, periodica con periodo 2 e tale che l'integrale nel periodo vale 0.

P.2 Osserviamo che:

(1) $$f(x) = \frac{x+1}{((x+2)^2+9)^2} = g(x+2)$$

dove si è posto $g(x) = \frac{x-1}{(x^2+9)^2}$.
Abbiamo ora:

$$g(x) = \frac{x}{(x^2+9)^2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{9}{(x^2+9)^2} = \frac{x}{(x^2+9)^2} - \frac{1}{9}\cdot\frac{9+x^2-x^2}{(x^2+9)^2} =$$

$$= \frac{x}{(x^2+9)^2} - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x^2+9} - x\frac{x}{(x^2+9)^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+9}\right)' - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x^2+9}\right) - \frac{i}{18}(-ix)\left(\frac{1}{x^2+9}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}h'(x) - \frac{1}{9}h(x) - \frac{i}{18}(-ix)h'(x)$$

dove si è posto $h(x) = \frac{1}{x^2+9}$.

A questo punto, ricordando che $\hat{h}(\lambda)=\frac{\pi}{3}e^{-3|\lambda|}$, si ha:

$$\hat{g}(\lambda)=-\frac{1}{2}i\lambda\hat{h}(\lambda)-\frac{1}{9}\hat{h}(\lambda)-\frac{i}{18}\left(i\lambda\hat{h}(\lambda)\right)'=$$

$$=-\frac{\pi}{6}i\lambda e^{-3|\lambda|}-\frac{\pi}{27}e^{-3|\lambda|}+\frac{\pi}{54}(1-3|\lambda|)e^{-3|\lambda|}=$$

$$=-\frac{\pi}{54}e^{-3|\lambda|}\left(9i\lambda+2-1+3|\lambda|\right)=-\frac{\pi}{54}e^{-3|\lambda|}\left(9i\lambda+3|\lambda|+1\right)$$

Infine da (1) segue che:

$$\hat{f}(\lambda)=e^{2i\lambda}\hat{g}(\lambda)=-\frac{\pi}{54}e^{2i\lambda-3|\lambda|}\cdot\left(9i\lambda+3|\lambda|+1\right)$$

$\boxed{\text{P.3}}$ Posto $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}} & \text{se } x>0\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$, per ogni $\varphi\in\mathcal{D}$ si ha:

$$T(\varphi)=\int_0^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\varphi(x)\,dx=T_f(\varphi).$$

Ma poiché $f(x)\in L^1_{loc}$, sappiamo già dalla teoria che si tratta di una distribuzione di ordine 0.

Rimane da verificare che il suo supporto è $[0,+\infty)$, cioè che l'aperto massimale sul quale T si annulla è $(-\infty,0)$.

Dobbiamo quindi verificare le solite 2 cose:

$\boxed{a}$ per ogni $\varphi\in\mathcal{D}$ tale che $supp(\varphi)\subset(-\infty,0)$ si ha $T(\varphi)=0$;

$\boxed{b}$ se A è un aperto non contenuto in $(-\infty,0)$ allora esiste $\varphi\in\mathcal{D}$, tale che $supp(\varphi)\subset A$ e $T(\varphi)\neq 0$.

La verifica di $\boxed{a}$ è ovvia, perché se $supp(\varphi)\subset(-\infty,0)$ allora $\varphi(x)\cdot f(x)$ è identicamente nulla.

Quanto a $\boxed{b}$, se A non è contenuto in $(-\infty, 0)$ allora conterrà un punto $x_0 \geq 0$ ed essendo aperto conterrà almeno anche un semiintorno destro di x_0, dove sarà possibile ritagliare un intervallo non degenere $[a,b] \subset A$ con $a > 0$. Basterà dunque prendere la solita funzione a campana $\varphi(x)$ col supporto contenuto in $[a,b]$ (e quindi anche in A) per avere:

$$T(\varphi) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\, dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)}{\sqrt{x}}\, dx > \frac{1}{\sqrt{b}} \int_a^b \varphi(x)\, dx > 0.$$

Possiamo quindi concludere che $(-\infty, 0)$ è l'aperto massimale su cui T si annulla e quindi il supporto di T è il suo complementare $[0, +\infty)$.