Metodi Matematici - Prova Simulata n. 4

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Sia $V = L^2([-1,1])$ dotato del solito prodotto scalare $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ e sia $W = \{ f \in V \mid f(x) = 0 \text{ q.o. in } [-1,0] \}$. Determinare $W^{\perp}$.

2) Data $f(x) = \chi_{[-5,5]}(x)$ calcolare $\|\hat{f}\|_{L^2}$.

3) Data $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, si considerino le seguenti proprietà:

a) il supporto di T è $\{0\}$;

b) xT è identicamente nulla;

c) $x^2 T$ è identicamente nulla.

Dire, tra esse, chi implica chi, motivando le risposte.

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) Enunciare e dimostrare il teorema che tratta della misura dell'insieme dei punti in cui una funzione sommabile vale $\pm\infty$.

2) Enunciare e dimostrare il teorema che descrive regolarità e comportamento per $\lambda \to \pm\infty$ di $\hat{f}(\lambda)$ quando $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

3) Dare la definizione di supporto di una distribuzione.

Soluzioni Prima Parte

P.1 Sia $H = \{ g \in L^1([-1,1]) \mid g(x) = 0 \text{ q.o. in } [0,1] \}$. Mostriamo che $H = W^\perp$.

È immediato verificare che $H \subset W^\perp$ perché, per ogni $f \in W$ e per ogni $g \in H$, si ha:

$$f(x) \cdot g(x) = 0 \quad \text{q.o. in } [-1,1]$$

e quindi:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x)\, dx = 0$$

Viceversa mostriamo che $g \notin H \Rightarrow g \notin W^\perp$. Infatti, se $g \notin H$ allora almeno uno dei 2 insiemi $A = \{ x \in [0,1] \mid g(x) > 0 \}$ e $B = \{ x \in [0,1] \mid g(x) < 0 \}$ non ha misura nulla.

Supponiamo, per fissare le idee, che sia $m(A) = \lambda > 0$ (se fosse $m(B) > 0$ si procede in modo simile).

Per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ definiamo $A_n = \{ x \in [0,1] \mid g(x) > \frac{1}{n} \}$. In tal modo si ottiene:

(1) $$A_n \subset A_{n+1} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} - \{0\}$$

e:

(2) $$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

Di conseguenza si ottiene:

$$\lim_{n \to +\infty} m(A_n) = m(A) = \lambda > 0$$

Ma allora $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} - \{0\}$ t.c. $m(A_{n_0}) > \frac{\lambda}{2}$.

Prendiamo dunque $\chi_{A_{n_0}}(x)$. Avremo che $\chi_{A_{n_0}}(x) \in W$ perché $A_{n_0} \subset [0,1]$ e che:

$$\langle \chi_{A_{n_0}}, g \rangle = \int_{-1}^{1} \chi_{A_{n_0}}(x) g(x)\, dx = \int_{A_{n_0}} g(x)\, dx > \int_{A_{n_0}} \frac{1}{n_0}\, dx = \frac{1}{n_0} m(A_{n_0}) > \frac{\lambda}{2 n_0} > 0$$

e quindi $g \notin W^\perp$.

Abbiamo quindi dimostrato anche che $g \notin H \Rightarrow g \notin W^\perp$ che, combinato col fatto che $H \subset W^\perp$, ci garantisce che $H = W^\perp$.

$\boxed{P.2}$ Dal Teorema di Plancherel segue che:

$$\|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\chi_{[-5,5]}(x)\right)^2 dx = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$$

e quindi:

$$\|\hat{f}\|_2 = 2\sqrt{5\pi}\,.$$

$\boxed{P.3}$ Mostriamo che se T soddisfa (b) allora deve soddisfare anche (c), ma non viceversa.

Dire che T soddisfa (b) equivale a dire che:

$$T(x\varphi(x)) = 0 \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

Ma allora:

$$x^2 T(\varphi) = T(x^2\varphi(x)) = T(x \cdot x\varphi(x)) \overset{\text{PERCHÉ } x\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \text{ E } T \text{ SODDISFA (b)}}{=} 0$$

Il viceversa non può valere perché esistono $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ che soddisfano (c) ma non (b).
Ad esempio, se prendo $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ definita da $T(\varphi) = \varphi'(0)$ si ha:

$$xT(\varphi) = T(x\varphi(x)) = (x\varphi(x))'_{x=0} = (\varphi(x) + x\varphi'(x))_{x=0} = \varphi(0) + 0\cdot\varphi'(0) = \varphi(0) = \delta_0(\varphi)$$

ma:

$$x^2T(\varphi) = T(x^2\varphi(x)) = (x^2\varphi(x))'_{x=0} = (2x\varphi(x) + x^2\varphi'(x))_{x=0} = 2\cdot 0\cdot\varphi(0) + 0^2\cdot\varphi'(0) = 0$$

quindi x^2T è identicamente nulla mentre xT no.

Confrontiamo ora (a) e (c). Verifichiamo che (c) $\Rightarrow$ (a) ma (a) $\not\Rightarrow$ (c).
Trovare $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ che soddisfi (a) ma non (c) è semplice: basta prendere T definita da $T(\varphi) = \varphi''(0)$. Il supporto di T è banalmente $\{0\}$ ma x^2T non è identicamente nulla perché, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha:

$$x^2T(\varphi) = T(x^2\varphi) = (x^2\varphi(x))''_{x=0} = (2\varphi(x) + 4x\varphi'(x) + x^2\varphi''(x))_{x=0} = 2\varphi(0) + 4\cdot 0\cdot\varphi'(0) + 0^2\varphi''(0) = 2\varphi(0) = 2\delta_0(\varphi)$$

Rimane da verificare che (c) $\Rightarrow$ (a).
Dobbiamo verificare che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R} - \{0\}$ si ha $T(\varphi) = 0$.
A tale scopo osserviamo che se $\operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathbb{R} - \{0\}$, essendo $\operatorname{supp}(\varphi)$ compatto possiamo

dire che esiste $r>0$ t.c. $\mathrm{supp}(\varphi) \in \mathbb{R} - [-r, r]$. Di conseguenza anche la funzione $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}$ ha lo stesso supporto di φ ed è di classe C^∞, quindi $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Di conseguenza:

PERCHÉ T SODDISFA (c)

$$T(\varphi) = T\left(x^2 \cdot \frac{\varphi(x)}{x^2}\right) = x^2 T\left(\frac{\varphi(x)}{x^2}\right) = x^2 T(\psi(x)) \overset{}{=} 0$$

Ricapitolando abbiamo dimostrato che (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) ma che (a) $\not\Rightarrow$ (c) e (c) $\not\Rightarrow$ (b). Come effetto collaterale di (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) abbiamo anche che (b) $\Rightarrow$ (a), per la proprietà transitiva.

Infine possiamo anche dire che (a) $\not\Rightarrow$ (b) perché, se per assurdo fosse (a) $\Rightarrow$ (b), combinandola con (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a), otterremmo che tutte le affermazioni dovrebbero essere equivalenti, cosa che non è.