Metodi Matematici - Prova Simulata n. 5

Titolo nota

www.problemisvolti.it

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Sia $V = L^2([0,1])$ dotato del solito prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.
Calcolare $d(f, W)$ dove $f(x)=\cos(9\pi x)$ e $W = \text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_9\}$ con $g_n(x) = 3\chi_{[\frac{n-1}{9}, \frac{n}{9}]}(x)$ per $n=1,\dots,9$.

2) Data $f(x) = \dfrac{1}{1+x^8}$, stimare regolarità e ordine di infinitesimo per $\lambda \to \pm\infty$ di $\hat{f}(\lambda)$.

3) Trovare tutte le $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ t.c. $T'' = 2\delta_0$.

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) Sia $(V, \langle , \rangle)$ uno spazio con prodotto scalare e sia $K \subset V$, dare la definizione di $K^\perp$ e dimostrare che è un sottospazio chiuso di V.

2) Mostrare che la soluzione dell'equazione delle onde in $[0,L]$ è unica, utilizzando il metodo dell'energia.

3) Dare un esempio di $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tale che sia T che T' abbiano ordine zero.

Soluzioni Prima Parte

P1 L'insieme $\{g_1, g_2, \dots, g_9\}$ è un insieme ortonormale. Infatti, $\forall n = 1, \dots, 9$ si ha:

$$\langle g_n, g_n \rangle = \int_0^1 \left(3\chi_{\left[\frac{n-1}{9}, \frac{n}{9}\right]}(x)\right)^2 dx = 9 \int_{\frac{n-1}{9}}^{\frac{n}{9}} 1 \, dx = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$$

Inoltre, $\forall i, j = 1, \dots, 9$, con $i \neq j$ si ha:

$$\langle g_i, g_j \rangle = \int_0^1 3\chi_{\left[\frac{i-1}{9}, \frac{i}{9}\right]}(x) \cdot 3\chi_{\left[\frac{j-1}{9}, \frac{j}{9}\right]}(x) \, dx = 9 \cdot m\left(\left[\frac{i-1}{9}, \frac{i}{9}\right] \cap \left[\frac{j-1}{9}, \frac{j}{9}\right]\right) = 9 \cdot 0 = 0$$

Per calcolare la distanza di f da W bisogna ora trovare la proiezione π_f di f in W, in modo che $d(f, W) = d(f, \pi_f)$.
Col teorema della proiezione si ottiene:

$$(1) \qquad \pi_f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f, g_i \rangle \, g_i(x)$$

Osserviamo però che $\forall i = 1, \dots, 9$ si ha:

$$\langle f, g_i \rangle = \int_0^1 \cos(9\pi x) 3\chi_{\left[\frac{i-1}{9}, \frac{i}{9}\right]}(x) \, dx = \int_{\frac{i-1}{9}}^{\frac{i}{9}} 3\cos(9\pi x) \, dx = \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} 3 \cdot \cos y \cdot \frac{1}{9\pi} \, dy = \frac{1}{3\pi} \int_{(i-1)\pi}^{i\pi} \cos y \, dy = 0$$

Quindi la (1) diventa:

$$\pi_f(x) = \sum_{i=0}^{n} 0 \cdot g_i(x) = 0$$

Ma allora:

$$d(f, \pi_f(x)) = d(f, 0) = \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 \cos^2(9\pi x) \, dx} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Quindi $d(f, W) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

P.2 Osserviamo che:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^8} \in L^1(\mathbb{R})$$

$$f'(x) = \frac{-8x^7}{(1+x^8)^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

$$f''(x) = -56x^6 \cdot \frac{1}{(1+x^8)^2} + 8x^7 \cdot (-2) \cdot \frac{8x^7}{(1+x^8)^3} = \frac{\overset{\text{grado} \leq 14}{P(x)}}{(1+x^8)^3} \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \dots = \frac{\overset{\text{grado} \leq 7n}{P(x)}}{(1+x^8)^{n+1}} \in L^1(\mathbb{R})$$

$$f^{(n+1)}(x) = P'(x) \cdot \frac{1}{(1+x^8)^{n+1}} - P(x) \cdot \frac{8x^7}{(1+x^8)^{n+2}} = \frac{P'(x)(1+x^8) - P(x) \cdot 8x^7}{(1+x^8)^{n+2}} = \frac{\overset{\text{grado} \leq 7(n+1)}{Q(x)}}{(1+x^8)^{n+2}} \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\vdots$$

Quindi tutte le derivate di f stanno in $L^1(\mathbb{R})$ e quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo:

$$\widehat{f^{(n)}(x)} = (i\lambda)^n \hat{f}(\lambda)$$

con $(i\lambda)^n \hat{f}(\lambda)$ che è continua e infinitesima per $\lambda \to \pm\infty$.

Ciò significa che:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \hat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{\lambda^n}\right) \quad \text{per } \lambda \to \pm\infty$$

Per quanto riguarda la regolarità di $\hat{f}$ osserviamo che:

$$f(x),\ x f(x),\ \dots,\ x^6 f(x) \in L^1(\mathbb{R})$$

quindi $\hat{f}(\lambda)$ è almeno di classe $C^6(\mathbb{R})$.

P.3 Dagli esempi visti durante il corso sappiamo già che:

$$(T_{|x|})' = T_{sgn(x)} \quad e \quad (T_{sgn(x)})' = 2\delta_0$$

quindi una possibile soluzione per:

(2) $$T'' = 2\delta_0$$

è data da:

$$T = T_{|x|}$$

Si tratta di trovare tutte le altre.

Osserviamo che se T è una qualsiasi altra soluzione di **(2)** deve essere:

$$\left(T - T_{|x|}\right)'' = T'' - T''_{|x|} = 2\delta_0 - 2\delta_0 = 0 .$$

Ciò significa ogni altra soluzione T di **(2)** deve essere del tipo:

$$T = T_{|x|} + \Upsilon$$

dove $\Upsilon \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ è una qualsiasi soluzione di:

(3) $$\Upsilon'' = 0$$

Sappiamo già che $T' = 0 \iff T = T_a$ con a funzione costante, quindi la **(3)** equivale a:

(4) $$\Upsilon' = T_a$$

Visto che $(ax)' = a$, una soluzione ovvia di **(4)** è data da $\Upsilon = T_{ax}$.

A questo punto, ragionando in modo analogo a quanto fatto per **(2)** si arriva a dire che tutte e sole le soluzioni di **(4)** sono le distribuzioni del tipo:

$$\Upsilon = T_{ax} + \mathcal{T}$$

dove $\mathcal{T}$ è una soluzione di:

$$\mathcal{T}' = 0$$

e quindi sappiamo già che $\mathcal{T}$ è una qualsiasi distribuzione del tipo T_b con b funzione costante.

Si può quindi concludere che le soluzioni di **(4)** sono tutte e sole quelle del tipo:

$$\Upsilon = T_{ax} + T_b = T_{ax+b}$$

Di conseguenza quelle di **(2)** sono tutte e sole quelle del tipo:

$$T = T_{|x|} + T_{ax+b}$$