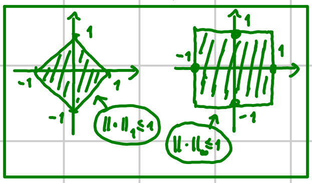
Metodi Matematici - Lista n. 1 - Risultati

Quesiti di Analisi Funzionale (Livello Zero)

Titolo nota

www.problemisvolti.it

1) Dire chi è la palla unitaria di $\mathbb{R}^2$ se si prende la norma $\|(x,y)\|_1 = |x|+|y|$ oppure se si prende la norma $\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$.



2) Per ogni $P=(x_P,y_P)$ e $Q=(x_Q,y_Q)$ in $\mathbb{R}^2$ definiamo:

$$d(P,Q)=\begin{cases} 1 & \text{se } \sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2}\geq 1 \\ \sqrt{(x_P-x_Q)^2+(y_P-y_Q)^2} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrare che:

a) d è una distanza su $\mathbb{R}^2$;

b) detta $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(0,0))<1\}$ allora $\partial B \neq \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid d((x,y),(0,0))=1\}$.

[Per (b) basta osservare che gli (x,y) tali che $d((x,y),(0,0))=1$ sono quelli la cui distanza euclidea è ≥ 1]

3) Dimostrare che in uno spazio normato la frontiera della palla unitaria è sempre costituita dall'insieme dei punti che distano 1 dall'origine.

4) Date $f,g\in C([0,1])$, con $f\neq g$, dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

a) $\|f\|_1=\|g\|_1=1 \Rightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_1<1$ $\boxed{\text{FALSA}}$

b) $\|f\|_2=\|g\|_2=1 \Rightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_2<1$ $\boxed{\text{VERA}}$

c) $\|f\|_\infty=\|g\|_\infty=1 \Rightarrow \left\|\frac{f+g}{2}\right\|_\infty<1$ $\boxed{\text{FALSA}}$

5) Nei seguenti casi dire se H è un sottoinsieme chiuso di $C([-1,1])$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. (Si ricordi che H è chiuso se e solo se $f_n\to f$ e $f_n\in H \Rightarrow f\in H$).

a) $H=\{f\in C([-1,1]) \mid f(0)=0\}$ $\boxed{\text{CHIUSO}}$

b) $H=\{f\in C([-1,1]) \mid f([0,1])=0\}$ $\boxed{\text{CHIUSO}}$

c) $H=\{f\in C([-1,1]) \mid f \text{ è un polinomio di grado} \leq 1\}$ $\boxed{\text{CHIUSO}}$

d) $H=\{f\in C([-1,1]) \mid f \text{ è un polinomio}\}$ $\boxed{\text{NON CHIUSO MA DENSO}}$

e) $H = \{ f \in C([-1,1]) \mid f$ è Lipschitziana $\}$ **NON CHIUSO MA DENSO**

f) $H = \{ f \in C([-1,1]) \mid f$ ha costante di Lipschitz $\leq 1 \}$ **CHIUSO**

g) $H = \{ f \in C([-1,1]) \mid f$ è pari $\}$ **CHIUSO**

h) $H = \{ f \in C([-1,1]) \mid f$ è dispari $\}$ **CHIUSO**

i) $H = \{ f \in C([-1,1]) \mid f$ è strettamente crescente $\}$ **NÉ CHIUSO NÉ DENSO**

j) $H = \{ f \in C([-1,1]) \mid f$ è debolmente crescente $\}$ **CHIUSO**

k) $H = \{ f \in C([-1,1]) \mid f$ ha min. assoluto per $x=0 \}$ **CHIUSO**

l) $H = \{ f \in C([-1,1]) \mid f$ ha min. rel. per $x=0 \}$ **NON CHIUSO MA DENSO**

6) Nei 12 casi del prob. (5), quando H non è chiuso, dire se è denso in $C([a,b])$.

7) Siano $f(x) = x + x^2$ e $g(x) = x - x^2$, entrambe ristrette a $[0,1]$ e sia H il sottospazio di $C([0,1])$ generato da g. Presa in $C([0,1])$ la norma $\|\cdot\|_\infty$, trovare la distanza tra f e H e dire se esiste una (o più) $g \in H$ che realizza tale distanza. (Ricordare che $d(f,H) = \inf_{g \in H} d(f,g)$)

> PER OGNI $\lambda \in [-3, 6+4\sqrt{2}]$ SI HA $\|f - \lambda g\|_\infty = 2$ MENTRE PER OGNI ALTRO λ SI HA $\|f - \lambda g\|_\infty > 2$. QUINDI $d(f,H) = 2$.

8) Sia $f(x) = x^2$, ristretta a $[0,1]$ e $H = \{ g \in C([0,1]) \mid g$ è polinomio di grado $\leq 1 \}$. Presa in $C([0,1])$ la norma $\|\cdot\|_1$ trovare la distanza tra f e H e dire se esiste una (o più) $g \in H$ che realizza tale distanza.

> SI HA $d(f,H) = \frac{1}{16}$ E L'UNICO $g \in H$ CHE REALIZZA TALE DISTANZA DA f È $g(x) = x - \frac{3}{16}$

9) Svolgere i problemi (7) e (8) usando la norma $\|\cdot\|_2$ al posto di $\|\ \|_\infty$ e $\|\ \|_1$.

> PER (7) CON $\|\cdot\|_2$ SI HA $d(f,H) = d(f,\pi_f) = \|(x+x^2) - 4(x-x^2)\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

> PER (8) SI HA $d(f,H) = d(f,\pi_f) = \|x^2 - (x - \frac{1}{6})\|_2 = \frac{1}{6\sqrt{5}}$

10) Definiamo $\ell_1 = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (a_n)$ è assolutamente convergente $\}$ e $\|(a_n)\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$.
Mostrare che $(\ell_1, \|\ \|_1)$ è uno spazio di Banach.

11) Definiamo $\ell_\infty = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid (a_n)$ è limitata $\}$ e $\|(a_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$
Mostrare che $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.

12) Definiamo $\ell_2 = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2 < +\infty \}$ e $\|(a_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2}$
Mostrare che $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Hilbert.