Metodi Matematici - Lista n. 2 - Risultati

Quesiti su Serie di Fourier e proiezioni in L^2

Titolo nota

www.problemisvolti.it

1) Data $f:(-a,a)\to\mathbb{R}$ definiamo $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ e $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Mostrare che:

a) $g(x)$ è pari, $h(x)$ è dispari e si ha $f(x)=g(x)+h(x)$;

b) quello descritto al punto (a) è l'unico modo di scrivere $f(x)$ come somma di una funzione pari e una funzione dispari.

[Suggerimento per (b): se ci fossero due modi $f(x)=g_1(x)+h_1(x)=g_2(x)+h_2(x)$ allora $g_1(x)-g_2(x)=h_2(x)-h_1(x)=0$] perché è sia pari che dispari

2) Sia $V=C([-1,1])$ con il solito prodotto scalare $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx$ e sia $H=\{f\in V \mid f \text{ è pari}\}$. Determinare $H^\perp$. $[H^\perp=\{f\in V \mid f \text{ è dispari}\}]$

3) Caratterizzare le funzioni pari e le funzioni dispari in $C([-\pi,\pi])$ attraverso le proprietà della loro serie di Fourier.

$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ pari} \Leftrightarrow b_k=0\ \forall k\in\mathbb{N}-\{0\} \\ f \text{ dispari} \Leftrightarrow a_k=0\ \forall k\in\mathbb{N} \end{array}}$

$b_k=0$

Trovare la serie di Fourier della restrizione a $[-\pi,\pi]$ delle $f(x)$ seguenti:

4) $f(x)=x$ $\quad\boxed{\begin{array}{l} a_k=0 \\ b_k=\frac{2}{k}\cdot(-1)^{k+1}\end{array}}$

5) $f(x)=|x|$ $\quad\boxed{\begin{array}{l} b_k=0 \quad a_0=\pi \\ a_k=\begin{cases}0 & k \text{ pari e } >0 \\ -\frac{4}{\pi k^2} & k \text{ dispari}\end{cases}\end{array}}$

6) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ $\quad\boxed{\begin{array}{l} a_k=0 \\ b_k=\begin{cases}0 & k \text{ pari} \\ \frac{4}{\pi k} & k \text{ dispari}\end{cases}\end{array}}$

7) $f(x)=x^2$ $\quad\boxed{\begin{array}{l} a_0=\frac{2}{3}\pi^2 \\ a_k=\frac{4\cdot(-1)^k}{k^2} \quad (k\geq 1) \\ b_k=0\end{array}}$

8) $f(x)=e^x$ $\quad\boxed{\begin{array}{l} a_k=\frac{(-1)^k(e^\pi-e^{-\pi})}{\pi\cdot(1+k^2)} \\ b_k=\frac{(-1)^{k+1}(e^\pi-e^{-\pi})}{\pi\cdot k(1+k^2)}\end{array}}$

9) $f(x)=\operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ $\quad\boxed{\begin{array}{l} a_k=0 \\ b_k=\frac{(-1)^{k+1}(e^\pi-e^{-\pi})}{\pi\cdot k(1+k^2)}\end{array}}$

10) $f(x)=\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\quad\boxed{\begin{array}{l} a_k=\frac{(-1)^k(e^\pi-e^{-\pi})}{\pi\cdot(1+k^2)} \\ b_k=0\end{array}}$

11) $f(x)=|\sin x|$ $\quad\boxed{\begin{array}{l} a_k=\begin{cases}0 & k \text{ dispari} \\ \frac{4}{\pi(1-k^2)} & k \text{ pari}\end{cases} \\ b_k=0\end{array}}$

12) $f(x)=\max\{\sin x, 0\}$ $\quad\boxed{\begin{array}{l} a_k=\begin{cases}0 & k \text{ dispari} \\ \frac{2}{\pi(1-k^2)} & k \text{ pari}\end{cases} \\ b_1=\frac{1}{2},\ b_k=0 \text{ per } k\geq 2\end{array}}$

Calcolare $\sum a_n$ seguendo il suggerimento indicato a fianco nei seguenti casi:

13) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ [SUGGERIMENTO: applicare l'identità di Parseval alla serie di Fourier di $f(x)=x$]

14) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ [SUGGERIMENTO: sfruttare la convergenza per $x=0$ o per $x=\pi$ della serie di Fourier di $f(x)=|x|$]

15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ [SUGGERIMENTO: applicare l'identità di Parseval alla serie di Fourier di $f(x)=x^2$]

16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ [SUGGERIMENTO: applicare l'identità di Parseval alla serie di Fourier di $f(x)=|x|$]

17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ [SUGGERIMENTO: sfruttare la convergenza per $x=\frac{\pi}{2}$ della serie di Fourier di $f(x)=x$]

18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ [SUGGERIMENTO: sfruttare la convergenza per $x=0$ della serie di Fourier di $f(x)=x^2$]

Per le $f(x)$ indicate in seguito calcolare la serie di Fourier della loro restrizione all'intervallo indicato a fianco:

19) $f(x)=x$ ristretta a $[-4,4]$ $\boxed{a_k=0 \quad b_k=\frac{8\cdot(-1)^k}{k\pi}}$

20) $f(x)=|x|$ ristretta a $[-1,1]$ $\boxed{b_k=0 \quad a_0=1 \quad a_k=\begin{cases}0 & k \text{ pari e } >0\\ -\frac{4}{\pi^2k^2} & k \text{ dispari}\end{cases}}$

21) $f(x)=x^2$ ristretta a $[-2,2]$ $\boxed{b_k=0 \quad a_0=\frac{8}{3} \quad a_k=\frac{16\cdot(-1)^k}{\pi^2k^2} \text{ per } k\geq 1}$

22) $f(x)=x\cdot|x|$ ristretta a $[-2,2]$ $\boxed{a_k=0 \quad b_k=\begin{cases}\frac{8}{k\pi}-\frac{32}{k^3\pi^3} & k \text{ dispari}\\ -\frac{8}{k\pi} & k \text{ pari}\end{cases}}$

23) Siano $V=C([-1,1])$, $H=\{g\in V \mid g \text{ è un polinomio di grado} \leq 2\}$ e $f(x)=x^3$. Dopo aver trovato una base ortonormale di H, trovare la proiezione di $f(x)$ su H e la distanza tra f e H.

$\boxed{\Pi_H(x)=g(x)=\frac{3}{5}x \quad d(f(x),H)=d(f(x),g(x))=\frac{2\sqrt{2}}{5\sqrt{7}}}$

24) Siano $V=C([-1,1])$ e $B=\{1,x,x^2,x^3,x^4\}\subset V$. Trovare un $\mathcal{B}\subset V$ che sia un insieme ortonormale e tale che $\operatorname{span}(B)=\operatorname{span}(\mathcal{B})$.

25) Come (23) ma con $V=C([0,1])$.

26) Sia $V=\ell^2$, come definito nel problema (12) della lista 1.

a) Trovare una base di Hilbert per V.

$\boxed{\text{Base}=\{e_i \mid i\in\mathbb{N}\} \text{ dove } e_k=(0,0,\dots,0,\underbrace{1}_{k\text{-esima posizione}},0\dots)}$

b) Mostrare che $B=\{x\in V \mid \|x\|\leq 1\}$ è chiuso e limitato ma non compatto.

$\boxed{\text{Presa } (e_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset B, \text{ nessuna sottosuccessione di } (e_n) \text{ è convergente}}$

c) Esibire un compatto $K\subset V$ tale che $\operatorname{span}(K)$ non abbia dimensione finita.

$\boxed{K=\left\{\frac{e_n}{n+1},\ n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{\bar{0}\}}$