Metodi Matematici 02/02/2018 - I Sessione - I Appello

Titolo nota

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Trovare la retta $y = ax + b$ che meglio approssima $f(x) = e^{-2x}$ in $[-1,1]$ con la norma L^2.

2) Data $f(x) = (x+3)^2 e^{-(x+1)^2}$ calcolare $\hat{f}$. Usare il risultato per calcolare $\|f\|_{L^1}$.

3) Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ definiamo $T(\varphi) = \int_1^2 x\, \varphi(x)\, dx$.
Verificare che T è una distribuzione e trovarne ordine e supporto.
Trovare poi T'.

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) Enunciare e dimostrare l'identità del parallelogramma.

2) Data $f \in C^\infty$ e $T \in \mathcal{D}'$, definire $f \cdot T$ e mostrare che è ancora in $\mathcal{D}'$.

3) Enunciare e dimostrare la regola della trasformata di Fourier della convoluzione.

Soluzioni Prima Parte

$\boxed{\text{P.1}}$ Il problema equivale a trovare, nello spazio $L^2([-1,1])$, la proiezione di $f(x)$ nel sottospazio W dei polinomi di grado minore o uguale a 1. Una possibile base per W è ovviamente $\{1, x\}$ che è ortogonale visto che $\langle 1, x\rangle = \int_{-1}^{1} 1\cdot x \, dx = 0$, ma non ortonormale, perchè:

$$\|1\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1^2 \, dx} = \sqrt{2}$$

$$\|x\|_{L^2} = \sqrt{\int_{-1}^{1} x^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Di conseguenza la proiezione $P_f(x)$ di $f(x)$ in W è data da:

$$P_f(x) = \underbrace{\left\langle f(x), \frac{1}{\sqrt{2}} \right\rangle}_{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \underbrace{\left\langle f(x), \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} \right\rangle}_{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\, x$$

Ma abbiamo:

$$1 = \int_{-1}^{1} e^{-2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} e^{2} \right) = \frac{e^2 - e^{-2}}{2\sqrt{2}}$$

$$2 = \int_{-1}^{1} e^{-2x} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \, dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right)' dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[x \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \right]_{-1}^{1} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} e^{-2x} \, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{2} e^{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \left(-e^{-2} - e^{2} - \frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} e^{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \left(e^2 + 3e^{-2} \right)$$

Quindi $P_f(x) = \dfrac{e^2 - e^{-2}}{4} - \dfrac{3}{8} \left(e^2 + 3e^{-2} \right) \cdot x$.

Ciò significa che la retta cercata è $y = -\frac{3}{8}\left(e^2 + 3e^{-2}\right) x + \frac{1}{4}\left(e^2 - e^{-2}\right)$

P.2 Notiamo che:

$$(\star) \qquad f(x) = (x+3)^2 \cdot e^{-(x+1)^2} = g(x+1)$$

dove si è posto:

$$g(x) = (x+2)^2 e^{-x^2}.$$

Ora, posto $h(x) = e^{-x^2}$, sappiamo che $\hat{h}(\lambda) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$, quindi per calcolare $\hat{g}(\lambda)$ basta osservare che:

$$g(x) = (x+2)^2 e^{-x^2} = (x^2+4x+4)\, h(x) = -(-ix)^2 h(x) + 4i(-ix)\, h(x) + 4h(x)$$

e quindi:

$$\hat{g}(\lambda) = -\left(\hat{h}(\lambda)\right)'' + 4i\left(\hat{h}(\lambda)\right)' + 4\hat{h}(\lambda) =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}(\lambda^2-2) - 2i\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \cdot \lambda + 4\sqrt{\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\left(\lambda^2 + 8i\lambda - 18\right)$$

A questo punto da $(\star)$ segue che:

$$\hat{f}(\lambda) = e^{i\lambda}\, \hat{g}(\lambda) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{i\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\left(\lambda^2 + 8i\lambda - 18\right)$$

Per calcolare $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ sapendo la trasformata di Fourier di f basta osservare che, essendo f positiva, si ha:

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \hat{f}(0) = \frac{9}{2}\sqrt{\pi}$$

P.3 Osserviamo che

$$T(\varphi) = \int_1^2 x\, \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \chi_{[1,2]}(x)\, \varphi(x)\, dx$$

e che la funzione $x \cdot \chi_{[1,2]}(x)$ è in $L^1(\mathbb{R})$, possiamo quindi citare il fatto (già noto) che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx$ è una distribuzione di ordine 0.

Per mostrare che il suo supporto è $[1,2]$ bisogna dimostrare che l'aperto massimale su cui T si annulla è $A=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$, cioè bisogna dimostrare le 2 seguenti affermazioni:

1) Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ il cui supporto sia contenuto in A si ha $T(\varphi)=0$.
(Questo è ovvio perché in tal caso $x\cdot\chi_{[1,2]}(x)\cdot\varphi(x)$ è identicamente nulla)

2) Se B è aperto non contenuto in A allora esiste $\varphi \in \mathcal{D}$ tale che $T(\varphi)\neq 0$.
Anche questo è abbastanza semplice da mostrare. Infatti se B è un aperto non contenuto in A, esisterà un intervallo non degenere I tale che $I \subset B \cap [1,2]$. Ma allora basta prendere φ funzione "a campana" di classe C^∞ col supporto tutto contenuto in I per avere che $T(\varphi)>0$.

Quindi possiamo concludere che il supporto di T è $[1,2]$.

Per quanto riguarda T', per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha:

$$T'(\varphi) = -T(\varphi') = -\int_1^2 x\,\varphi'(x)\,dx = -\Big[x\,\varphi(x)\Big]_1^2 + \int_1^2 \varphi(x)\,dx =$$

$$= -2\,\varphi(2)+\varphi(1)+\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[1,2]}(x)\,\varphi(x)\,dx$$

Quindi:

$$T' = -2\,\delta_2+\delta_1+T_{\chi_{[1,2]}(x)}$$

dove, come al solito, δ_{x_0} indica la delta di Dirac centrata in x_0 e, se $f\in L^1(\mathbb{R})$, T_f indica la distribuzione tale che $T_f(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$.