Metodi Matematici 24/02/2018 - I Sessione - II Appello

Titolo nota

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x)=x|x|$ per ogni $x\in[-\pi,\pi)$.

a) Determinare la serie di Fourier di $f(x)$.

b) Dire per quali $x\in\mathbb{R}$ la serie di Fourier trovata NON converge a $f(x)$.

2) Siano $g(x)=\chi_{[-1,1]}(x)$ ed $f=g*g$.

a) Trovare esplicitamente $f(x)$.

b) Trovare $\hat{f}$.

3) Per ogni fissato $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ definiamo $T_n:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$

$$\varphi\longmapsto n^2\int_0^{\frac{1}{n}}\big(\varphi(x)-\varphi(0)\big)\,dx$$

a) Verificare che T_n è una distribuzione.

b) Determinare il supporto di T_n

c) Determinare l'ordine di T_n

d) (Facoltativo) Trovare $T\in\mathcal{D}'$ tale che $T_n\xrightarrow{\mathcal{D}'}T$

PUNTEGGI

1: 8+2

2: 5+5

3: 6+2+2+?

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) Enunciare e dimostrare il teorema della proiezione.

2) (a) È vero che $T\in\mathcal{D}'\Rightarrow T\in\mathcal{S}'$?

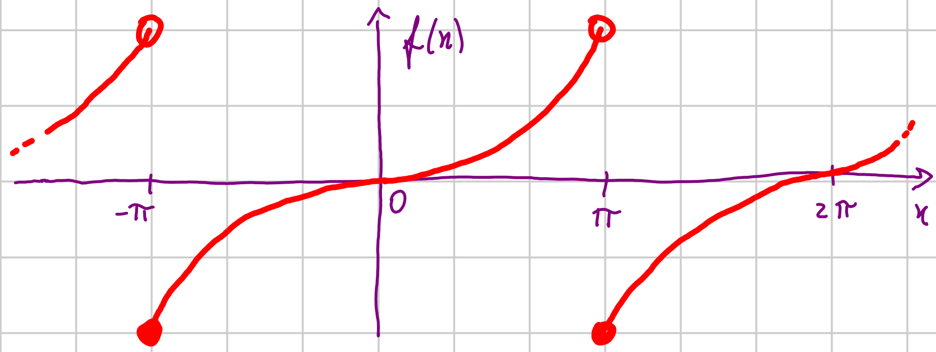
(b) È vero che $T\in\mathcal{S}'\Rightarrow T\in\mathcal{D}'$?

Rispondere ad entrambe le domande e motivare le risposte.

3) Enunciare e dimostrare la regola che permette di calcolare la trasformata di Fourier di $f(x-x_0)$ conoscendo quella di $f(x)$.

Soluzioni Prima Parte

$\boxed{\text{P.1}}$ Il grafico di $f(x)$ è quello rappresentato nella figura a fianco.



Grazie ai teoremi generali sulle serie di Fourier, possiamo dire fin da ora che la serie di Fourier che troveremo convergerà a $f(x)$ se e solo se $x \neq (2k+1)\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. In tali punti infatti la serie di Fourier deve convergere al punto medio del salto di $f(x)$, cioè a 0, mentre $f(x)$ vale sempre $-\pi^2$.

Passiamo ora al calcolo della serie di Fourier. Poiché $f(x)$ è dispari (a meno di un insieme di misura nulla) ci sono solo i termini con $\sin(nx)$, quindi:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

dove:

$$\boxed{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} x^2\left(-\cos(nx)\right)'\,dx =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\left[x^2(-\cos nx)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\cos(nx)\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(-\pi^2\cos n\pi + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\left(\sin(nx)\right)'\,dx\right) =$$

$$= -\frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{4}{n^2\pi}\left(\left[x\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right) =$$

$$= -\frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{4}{n^2\pi}\left[\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} =$$

$$= \begin{cases} \frac{2\pi}{n} - \frac{8}{\pi n^3} = \boxed{\frac{2\pi^2 n^2 - 8}{\pi n^3}} & n \text{ dispari} \\[2ex] \boxed{-\frac{2\pi}{n}} & n \text{ pari} \end{cases}$$

P.2 **a** $f(x) = g(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-1,1]}(y) \cdot \chi_{[-1,1]}(x-y)\, dy =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-1,1]}(y) \cdot \chi_{[x-1,x+1]}(y)\, dy = \int_{[-1,1]\cap[x-1,x+1]} 1\, dx = \begin{cases} = 0 & \text{se } |x| \geq 2 \\ = 2 - |x| & \text{se } |x| < 2 \end{cases}$$

b $\hat{f}(\lambda) = \hat{g}(\lambda) \cdot \hat{g}(\lambda) = \left(\frac{2 \sin(\lambda x)}{\lambda}\right)^2 = \frac{4 \sin^2(\lambda x)}{\lambda^2}$

P.3 **a+c** Per ogni fissato $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ si ha:

$$T_n(\varphi) = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x) - \varphi(0)\, dx = n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x) \cdot \varphi(x)\, dx - n\varphi(0)$$

quindi:

$$T_n = n^2 \cdot T_{\chi_{[0,\frac{1}{n}]}} - n \cdot \delta_0$$

dove con δ_0 abbiamo indicato la delta di Dirac centrata in 0 mentre, se $f \in L^1$, con T_f si indica la distribuzione $T : \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx$.
Siccome sappiamo già che δ_0 e T_f sono distribuzioni di ordine 0, lo stesso vale per tutte le loro combinazioni lineari e quindi anche per T_n, per ogni fissato $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

b Mostriamo che, per ogni fissato $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, il supporto di T_n è $[0, \frac{1}{n}]$, ovvero che $A = (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{n}, +\infty)$ è l'aperto massimale su cui si annulla T. Mostriamo cioè che valgono le 2 affermazioni seguenti:

① Se $\varphi \in \mathcal{D}$ ha il supporto contenuto in A allora $T(\varphi) = 0$.
(questo è ovvio perché $\varphi(x) - \varphi(0)$ è identicamente nulla su $[0, \frac{1}{n}]$)

② Se B è aperto non contenuto in A allora T non si annulla in A.
In tal caso, infatti, è possibile trovare un intervallo non degenere I tutto contenuto in $B \cap (0, \frac{1}{n})$ e una funzione "a campana" $\varphi \in \mathcal{D}$ col supporto contenuto in I, cosicché si ottiene:

$$T_n(\varphi) = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x) - \varphi(0)\, dx = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\, dx = n^2 \int_I \varphi(x)\, dx > 0$$

PERCHÈ $supp(\varphi) \subset I \subset (0, \frac{1}{n})$ E QUINDI $\varphi(0) = 0$

PERCHÉ $\varphi(x) = 0$ FUORI DA I E $I \subset (0, \frac{1}{n})$

PERCHÉ $\varphi(x)$ È UNA FUNZIONE A CAMPANA

Quindi, se $B \not\subset A$, è possibile trovare $\varphi \in \mathcal{D}$, col supporto contenuto in B e tale che $T_n(\varphi) \neq 0$. Ciò significa che T non si annulla in B.

Quindi l'aperto massimale in cui T_n si annulla è $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{n}, +\infty)$. Ciò significa che il supporto di T_n è $[0, \frac{1}{n}]$.

$\boxed{d}$ Applicando a $\varphi(x)$, nell'intervallo $[0, x]$, il teorema sul polinomio di Taylor col resto di Lagrange, otteniamo che $\exists\, \xi_x \in (0, x)$ tale che:

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot x + \frac{1}{2} \varphi''(\xi_x)\, x^2 .$$

Di conseguenza:

$$T_n(\varphi) = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi(x) - \varphi(0)\, dx = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi'(0) x + \frac{1}{2} \varphi''(\xi_x) x^2\, dx =$$

$$= n^2 \varphi'(0) \int_0^{\frac{1}{n}} x\, dx + \frac{n^2}{2} \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi''(\xi_x)\, x^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \varphi'(0) + \frac{n^2}{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi''(\xi_x)\, x^2\, dx$$

Ma:

$$\left| \frac{n^2}{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} \varphi''(\xi_x)\, x^2\, dx \right| \leq \frac{n^2}{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} |\varphi''(\xi_x)|\, x^2\, dx \leq$$

$$\leq \frac{n^2}{2} \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} \|\varphi''\|_{L^\infty} \cdot x^2\, dx = \frac{n^2}{2} \cdot \|\varphi''\|_{L^\infty} \cdot \int_0^{\frac{1}{n}} x^2\, dx = \frac{\|\varphi''\|_{L^\infty}}{6n} \xrightarrow{\text{per } n \to +\infty} 0$$

Quindi $T_n(\varphi) \to \frac{1}{2} \varphi'(0)$ per $n \to +\infty$.

Ciò significa che se si pone $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \frac{1}{2} \varphi'(0)$ allora $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$.