Metodi Matematici 23/06/2018 - II Sessione - I Appello

Titolo nota

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Date $f, g \in L^2([0,2])$ definite da $f(x) = 3x$ e $g(x) = 3$.

   a) Calcolare la distanza tra f e g in $L^2([0,2])$.

   b) Trovare tutte le $h \in L^2([0,2])$ che distano $\frac{\sqrt{6}}{2}$ sia da f che da g.

2) Sia u tale che $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-y)}{1+y^2}\, dy\right)'' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-y)}{1+y^2}\, dy - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}$

   e abbastanza regolare da poter utilizzare tutte le regole che servono sulle trasformate di Fourier. a) Trovare $\hat{u}(\lambda)$. b) Trovare $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\, dx$.

3) Per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ definiamo $T_n(\varphi) = n^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \sin(nx)\, \varphi(x)\, dx$

   a) Mostrare che, per ogni n, $T_n \in \mathcal{D}'$.

   b) Trovare ordine e supporto di T_n, motivando la risposta.

   c) Trovare, se esiste, $T \in \mathcal{D}'$ tale che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$, motivando la risposta.

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) Esibire, motivando la risposta:

   a) $f \in L^2(\mathbb{R})$ t.c. $f \notin L^1(\mathbb{R})$.

   b) $g \in L^1(\mathbb{R})$ t.c. $g \notin L^2(\mathbb{R})$.

2) Dopo aver detto cosa significa che una distribuzione T si annulla su un aperto, dimostrare che se T si annulla su due intervalli aperti A e B allora si annulla anche su $A \cup B$.

3) Enunciare e dimostrare, sotto le opportune ipotesi, la regola che esprime la trasformata di Fourier di f' in funzione di quella di f.

Soluzioni Prima Parte

P.1 **a**

$$d(f,g) = \sqrt{\int_0^2 \left(f(x)-g(x)\right)^2 dx} = \sqrt{\int_0^2 (3x-3)^2 dx} = 3\sqrt{\int_0^2 (x-1)^2 dx} =$$

$$= 3\sqrt{\int_{-1}^{1} y^2 dy} = 3\sqrt{\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1}} = 3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6}$$

b Visto che $\frac{\sqrt{6}}{2}$ è la metà di $\sqrt{6}$, un candidato ovvio per h è il "punto medio" in L^2 tra f e g. Infatti se poniamo $h(x) = \dfrac{f(x)+g(x)}{2}$ si ottiene:

$$d(h,f) = \left\| \frac{f+g}{2} - f \right\|_{L^2} = \left\| \frac{g-f}{2} \right\|_{L^2} = \frac{1}{2}\| g-f\|_{L^2} = \frac{1}{2} d(g,f) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$d(h,g) = \left\| \frac{f+g}{2} - g \right\|_{L^2} = \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^2} = \frac{1}{2}\| f-g\|_{L^2} = \frac{1}{2} d(f,g) = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Rimane da far vedere che tale $h(x)$ è l'unica funzione con tale proprietà. Questo fatto, apparentemente ovvio, non è in realtà scontato: per altre norme (ad esempio la norma L^1) è falso. Dobbiamo quindi dimostrarlo.

VEDI FIG. 1 SOTTO

Se per assurdo, oltre ad $h(x)$, esistesse una seconda funzione $k(x)$ tale che $d(k,f) = d(k,g) = \frac{1}{2} d(f,g)$, detta $\varphi(x) = \dfrac{h(x)+k(x)}{2}$, grazie all'identità del parallelogramma si avrebbe:

$$\left(d(\varphi,f)\right)^2 = \|\varphi - f\|_{L^2}^2 = \left\| \frac{h-f}{2} + \frac{k-f}{2} \right\|_{L^2}^2 \overset{\text{perchè } h\neq k}{<} \left\| \frac{h-f}{2} + \frac{k-f}{2} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \frac{h-f}{2} - \frac{k-f}{2} \right\|_{L^2}^2 \overset{\text{Per l'identità del parallelogramma}}{=}$$

$$= 2\left\| \frac{h-f}{2} \right\|_{L^2}^2 + 2\left\| \frac{k-f}{2} \right\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2}\left(d(h,f)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(d(k,f)\right)^2 = \left(\frac{1}{2} d(f,g)\right)^2$$

Cioè:

(1) $$\boxed{d(\varphi,f) < \frac{1}{2} d(f,g)}$$

In modo del tutto analogo si ottiene:

(2) $$\boxed{d(\varphi,g) < \tfrac{1}{2}\, d(f,g)}$$

Da (1) e (2) quindi segue che

$$\boxed{d(\varphi,f) + d(\varphi,g) < d(f,g)}$$ (ASSURDO)

che è in contraddizione con la disuguaglianza triangolare.
È quindi assurdo supporre che esista una seconda funzione $k(x)$ (oltre ad $h(x)$) che disti sia da f che da g la metà di $d(f,g)$.
Ciò completa la dimostrazione.

NOTA PER LA FIGURA 1:

Se $d(f,h) = d(g,h) = d(f,k) = d(g,k) = \frac{1}{2} d(f,g)$ e $\varphi = \frac{h+k}{2}$ allora sia $d(f,\varphi)$ che $d(g,\varphi)$ sono minori di $\frac{1}{2} d(f,g)$ (per l'identità del parallelogramma) e quindi nel triangolo f, g, φ non vale la disuguaglianza triangolare.

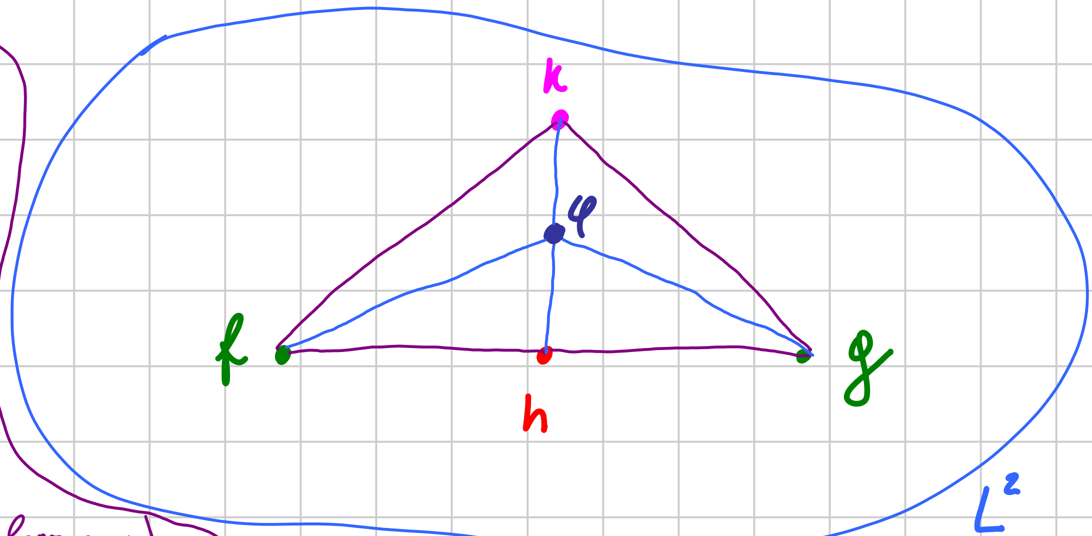

FIGURA 1

P.2 **a** Visto che abbiamo tutta regolarità che serve per utilizzare tutte le regole della Trasformata di Fourier che servono, trasformando in ambo i membri si ottiene:

$$(i\lambda)^2\, \hat{u}(\lambda)\cdot \pi e^{-|\lambda|} = \hat{u}(\lambda)\cdot \pi e^{-|\lambda|} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

da cui segue:

$$(1+\lambda^2)\, e^{-|\lambda|}\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

cioè:

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}+|\lambda|}}{1+\lambda^2}$$

b $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,dx = \hat{u}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

P.3 **a** Per ogni fissato $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha:

$$T_n(\varphi) = n^2 \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \sin(nx)\,\varphi(x)\,dx = n^2 \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}]}(x) \cdot \sin(nx)\,\varphi(x)\,dx$$

per cui il fatto che T_n sia una distribuzione segue dal fatto che $\chi_{[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}]}(x) \cdot \sin(nx) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

b T_n è di ordine zero, come sempre succede quando T è della forma $T(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$ con $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
Questo fatto poteva essere anche solo citato, essendo stato visto a lezione, ma nel caso specifico il calcolo era molto semplice visto che

$$|T_n(\varphi)| = \left| n^2 \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} (\sin nx)\,\varphi(x)\,dx \right| \leq n^2 \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} |\sin(nx)| \cdot \|\varphi\|_\infty\,dx \leq$$

$$\leq n^2 \cdot \|\varphi\|_\infty \cdot \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} 1\,dx \leq 2\pi n \cdot \|\varphi\|_\infty = C \cdot \|\varphi\|_\infty$$

Inoltre il supporto di T_n è $\left[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right]$. Per motivarlo servono 2 osservazioni:

1) Se il supporto di φ è contenuto in $\left(-\infty,-\frac{\pi}{n}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ allora $T_n(\varphi)=0$, visto che in $\left[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right]$ la funzione integranda è identicamente nulla.

2) Se A è un aperto non vuoto che interseca $\left[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right]$ allora deve intersecare anche $\left(-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right)$ visto che se ne interseca un estremo deve intersecarne anche un semi-intorno. Di conseguenza esiste tutto un intervallo I aperto e non vuoto contenuto in $A\cap\left(-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right)$. Senza perdere di generalità si può sempre prendere I in modo che sia o tutto in $\left(0,\frac{\pi}{n}\right)$ o tutto in $\left(-\frac{\pi}{n},0\right)$, in modo che $\sin nx$ abbia segno costante. Posso ora prendere $\varphi\in\mathcal{D}$ col supporto contenuto in I (e quindi in A) in modo che $\varphi(x)\geq 0$ e non identicamente nullo (vedi FIG. 2).

Per tale φ si ha

$$T_n(\varphi)=n^2\int_I \sin(nx)\,\varphi(x)\,dx \neq 0$$

perché in I la funzione integranda è continua, ha segno costante e non è identicamente nulla.

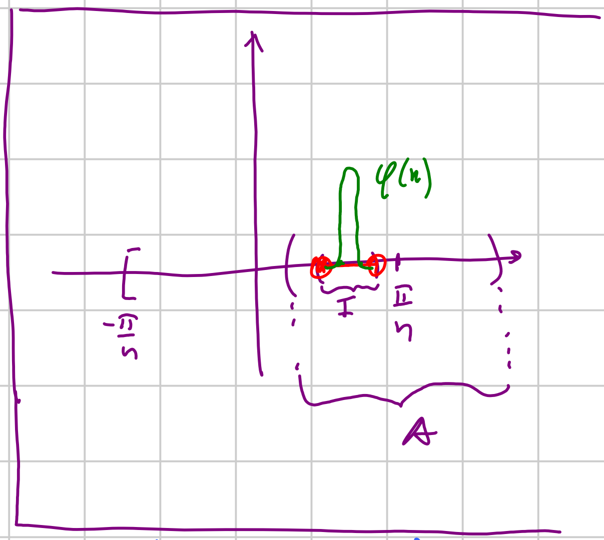

FIGURA 2

Questo significa che se l'aperto A interseca $\left[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}\right]$, è sempre possibile trovare $\varphi\in\mathcal{D}$ col supporto contenuto in A e tale che $T_n(\varphi)\neq 0$.

C Mostriamo che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ dove $T(\varphi)=2\pi\varphi'(0)$ per ogni $\varphi\in\mathcal{D}$.

Infatti si ha:

$$T_n(\varphi) = n^2 \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \sin(nx)\,\varphi(x)\,dx =$$

Usando la formula di Taylor col resto di Lagrange

ξ_x compreso tra 0 e x

$$= n^2 \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \sin(nx) \left(\varphi(0) + \varphi'(0)x + \varphi''(\xi_x)\frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= n^2\varphi(0) \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \sin(nx)\,dx + n^2\varphi'(0) \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \sin(nx)\cdot x\,dx + n^2 \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \sin(nx)\,\varphi''(\xi_x)\frac{x^2}{2}\,dx =$$

$$= 1 + 2 + 3$$

$$1 = n^2\varphi(0) \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \sin(nx)\,dx = n^2\cdot\varphi(0)\cdot 0 = 0$$

$$2 = n\,\varphi'(0) \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \left(n\cdot \sin(nx)\right)\cdot x\,dx = n\,\varphi'(0) \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \left(-\cos(nx)\right)' x\,dx =$$

$$= n\varphi'(0)\cdot\left(\Big[-\cos(nx)\cdot x\Big]_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} + \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \cos(nx)\,dx \right) =$$

$$= n\,\varphi'(0)\cdot\left(-(-1)\frac{\pi}{n} + (-1)\cdot\left(-\frac{\pi}{n}\right) + 0 \right) = 2\pi\,\varphi'(0)$$

$$|3| = n^2 \left| \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \sin(nx)\,\varphi''(\xi_x)\frac{x^2}{2}\,dx \right| \leq n^2 \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} 1\cdot \|\varphi''\|_\infty \cdot \frac{x^2}{2}\,dx =$$

$$= n^2\cdot\|\varphi''\|_\infty \int_0^{\frac{\pi}{n}} x^2\,dx = n^2\cdot\|\varphi''\|_\infty\,\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 = \frac{\pi^3\cdot\|\varphi''\|_\infty}{3n}$$

Quindi, per ogni fissato $\varphi \in \mathcal{D}$, si ha

$$T_n(\varphi) = 2\pi\varphi'(0) + o(1)$$

e quindi

$$T_n(\varphi) \to 2\pi\varphi'(0)$$

Ciò significa che, indicata con T la distribuzione tale che $T(\varphi) = 2\pi\varphi'(0)$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, si ha:

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T.$$