Metodi Matematici 13/07/2018 - II Sessione - II Appello

Titolo nota

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Siano date $f_1, f_2, f_3 \in L^1([-1,1])$ definite da $f_1(x) = |x|$, $f_2(x) = x$ e $f_3(x) = 1 - |x|$, poniamo $B_1 = \{ f \in L^1([-1,1]) \mid \|f\|_{L^1} < 1 \}$ e $S_1 = \{ f \in L^1([-1,1]) \mid \|f\|_{L^1} = 1 \}$

a) Mostrare che $f_1, f_2, f_3 \in S_1$.

b) Mostrare che $\frac{1}{2}(f_1 + f_2) \in B_1$ mentre $\frac{1}{2}(f_1 + f_3) \in S_1$

c) Data una qualsiasi $F \in S_1$ e continua su $[-1,1]$ mostrare che:

c_1) $F(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1,1] \Rightarrow \frac{1}{2}(f_1 + F) \in S_1$

c_2) $F(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1,1] \Leftarrow \frac{1}{2}(f_1 + F) \in S_1$ (facoltativo)

2) Trovare $u \in \mathcal{S}$ tale che
$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(y) u(x-y)\, dy - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(y) e^{-(x-y)^2} dy = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

3) Per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ definiamo $T_n(\varphi) = n^2 \cdot \left(\varphi\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \varphi\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \right)$

a) Mostrare che, per ogni n, $T_n \in \mathcal{D}'$.

b) Trovare ordine e supporto di T_n, motivando la risposta.

c) Trovare, se esiste, $T \in \mathcal{D}'$ tale che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$, motivando la risposta.

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) a) Trovare $f \in L^1(0,1)$ ma tale che $f \notin L^2(0,1)$

b) Mostrare invece che $f \in L^2(0,1) \Rightarrow f \in L^1(0,1)$.

2) Dare la definizione di "distribuzione temperata" e mostrare che una distribuzione temperata è sempre una distribuzione, ma non viceversa.

3) Enunciare e dimostrare, sotto le opportune ipotesi, la regola che esprime la trasformata di Fourier di $f(cx)$ in funzione di quella di $f(x)$.

Soluzioni Prima Parte

P.1 **a** Si ha
$$\|f_1\|_{L^1} = \int_{-1}^{1} |f_1(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} |x|\,dx = 2\int_0^1 x\,dx = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$
$$\|f_2\|_{L^1} = \int_{-1}^{1} |f_2(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} |x|\,dx = \dots = 1$$
$$\|f_3\|_{L^1} = \int_{-1}^{1} |f_3(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} |1-|x||\,dx = \int_{-1}^{1} 1-|x|\,dx =$$
$$= \int_{-1}^{1} 1\,dx - \int_{-1}^{1} |x|\,dx = \dots = 2-1 = 1$$
quindi f_1, f_2 ed f_3 stanno tutte in S_1.

b Si ha:
$$\left\|\tfrac{1}{2}(f_1+f_2)\right\|_{L^1} = \int_{-1}^{1} \left|\frac{|x|+x}{2}\right| dx = \int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_0^1 x\,dx = 0+\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$
quindi $\frac{1}{2}(f_1+f_2) \in B_1$.

Invece
$$\left\|\tfrac{1}{2}(f_1+f_3)\right\|_{L^1} = \int_{-1}^{1} \left|\frac{|x|+(1-|x|)}{2}\right| dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dx = 1$$
quindi $\frac{1}{2}(f_1+f_3) \in S_1$.

c₁

Perchè $F(x) \geq 0$ per ogni x

$$\left\|\tfrac{1}{2}(f_1+F)\right\|_{L^1} = \int_{-1}^{1} \left|\frac{|x|+F(x)}{2}\right| dx = \int_{-1}^{1} \frac{|x|+F(x)}{2}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{|x|+|F(x)|}{2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |x|\,dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |F(x)|\,dx = \frac{1}{2}\|f_1\|_{L^1} + \frac{1}{2}\|F\|_{L^1} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = 1$$

Perchè $f_1 \in S_1$ e $F \in S_1$

quindi $\frac{f_1+F}{2} \in S_1$.

c₂ Basta mostrare che se per assurdo fosse $F(x)<0$ per qualche x, allora si avrebbe $\left\|\frac{f_1+F}{2}\right\|_{L^1} < 1$ e ciò sarebbe in contraddizione col fatto che $\frac{1}{2}(f_1+F) \in S_1$.

Per cominciare osserviamo che, grazie alla continuità di F, se c'è un x per il quale $F(x)<0$ allora c'è tutto un intervallo $I \subset [-1,1]$ tale che $F(x)<0$ per ogni $x \in I$. Si noti che, passando eventualmente

ad un sottointervallo, si può sempre supporre che I sia compatto e non contenga il punto $x=0$.
Di conseguenza la disuguaglianza:

$$(\text{✡})\qquad \big||x|+F(x)\big| \leq |x|+|F(x)|$$

che è sempre vera, diventa stretta nell'intervallo I, perché, per ogni $x\in I$, si ha:

$$(*)\qquad \big|\,|x|+F(x)\big| \underset{\text{Perché } F(x)<0}{=} \big|\,|x|-|F(x)|\,\big| \underset{\text{Perché sia } |x| \text{ che } |F(x)| \text{ sono strettamente positivi}}{<} \big|\,|x|+|F(x)|\,\big| = |x|+|F(x)|$$

Il fatto che $\big||x|+F(x)\big|$ e $|x|+|F(x)|$ siano entrambe continue su $[-1,1]$, combinato con $(*)$ e (✡), garantisce che $\int_{-1}^{1}\big||x|+F(x)\big|\,dx < \int_{-1}^{1}|x|+|F(x)|\,dx$, con la disuguaglianza stretta, quindi:

$$\left\|\tfrac{1}{2}(f_1+F)\right\|_{L^1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\big||x|+F(x)\big|\,dx < \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|x|+|F(x)|\,dx = \frac{1}{2}\|f_1\|_{L^1}+\frac{1}{2}\|F\|_{L^1} = \frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1 = 1$$

cioè $\left\|\tfrac{1}{2}(f_1+F)\right\|_{L^1}<1$, in contraddizione col fatto che $\tfrac{1}{2}(f_1+F)\in S_1$.
Quindi è assurdo supporre che $F(x)<0$ per qualche $x\in[-1,1]$.

P.2

Facendo la trasformata di Fourier in ambo i membri si ottiene:

$$\left(\hat{u}(\lambda)\right)^2 - 2\,\hat{u}(\lambda)\cdot\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\lambda^2}{4}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

che riscritta meglio diventa:

$$\left(\hat{u}(\lambda)\right)^2 - 2\,\hat{u}(\lambda)\cdot\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\lambda^2}{4}} + \left(\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\right)^2 = 0$$

Cioè:

$$\left(\hat{u}(\lambda) - \sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\lambda^2}{4}}\right)^2 = 0.$$

Di conseguenza $\hat{u}(\lambda) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$ e quindi $u(x) = e^{-x^2}$.

P.3 **a** Se indichiamo con δ_{x_0} la delta di Dirac nel punto x_0, allora per ogni fissato $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ si ha $T_n = n^2 \delta_{1+\frac{1}{n}} - n^2 \delta_{1+\frac{1}{n+1}}$, quindi T_n è banalmente una distribuzione perché è combinazione lineare di distribuzioni

b Visto che sappiamo già che δ_{x_0} ha supporto $\{x_0\}$ e ordine 0, segue subito che T_n ha supporto $\left\{1+\frac{1}{n+1}, 1+\frac{1}{n}\right\}$ e ordine 0.

c Per ogni fissato $\varphi \in \mathcal{D}$, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si ha:

$$T_n(\varphi) = n^2\left(\varphi\left(1+\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right) = n^2\left(\left(1+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)\right) \cdot \frac{\varphi\left(1+\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)} =$$

$$= n^2 \cdot \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{\varphi\left(1+\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{n}{n+1} \cdot \varphi'(\xi_n)$$

con $1 + \frac{1}{n+1} < \xi_n < 1 + \frac{1}{n}$, per il teorema di Lagrange.

Di conseguenza:

$$\lim_{n \to +\infty} T_n(\varphi) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} \varphi'(\xi_n) = 1 \cdot \varphi'(1) = \varphi'(1)$$

Ciò significa che presa la distribuzione $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi'(1)$

si ha che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$.