Metodi Matematici 01/09/2018 - III Sessione - I Appello

Titolo nota

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π tale che $f(x)=(\pi-|x|)\,\mathrm{sgn}(x)$ per ogni $x\in[-\pi,\pi)$.

a) Determinare la serie di Fourier di $f(x)$.

b) Usare lo sviluppo trovato per calcolare il valore di $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.

2) Sia $v(x)\in L^1(\mathbb{R})$ tale che $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(y)\,e^{-|x-y|}\,dy=\frac{1}{1+x^2}+2x\,e^{-x^2}$.

a) Trovare $\hat{v}(\lambda)$

b) Dire quanto vale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,dx$.

3) Per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ e per ogni $\varphi\in\mathcal{D}$ definiamo $\displaystyle T_n(\varphi)=n\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{sgn}(x)\left(\varphi(x)-\varphi\left(x+\tfrac{1}{n}\right)\right)dx$

a) Mostrare che, per ogni n, $T_n\in\mathcal{D}'$.

b) Trovare ordine e supporto di T_n, motivando la risposta.

c) Trovare, se esiste, $T\in\mathcal{D}'$ tale che $T_n\xrightarrow{\mathcal{D}'}T$, motivando la risposta.

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) Sia V uno spazio vettoriale dotato di una norma $\|\cdot\|$.

a) Dire cosa significa che una successione (f_n) in V è di Cauchy.

b) Dire cosa significa che $(V,\|\cdot\|)$ è di Banach.

c) Dare un esempio di spazio di Banach motivando la risposta.

2) Enunciare e dimostrare la regola della trasformata di Fourier della convoluzione.

3) a) Dare la definizione di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

b) Dire, motivando la risposta, se è vero che $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\Rightarrow\hat{\varphi}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Soluzioni Prima Parte

P.1 **a** $f(x)$ è una funzione pari quindi il suo sviluppo in serie di Fourier è del tipo:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

dove i coefficienti b_n sono dati da:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi - |x|)\,\mathrm{sgn}(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)'dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{x-\pi}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n} - \left[\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{n}$$

Quindi:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n}\sin(nx)$$

b $f(x)$ è C^1 a tratti ed è discontinua solo nei punti del tipo $2k\pi$ con k intero, quindi per ogni altro valore di x la serie di Fourier converge al valore della funzione. In particolare per $x = \frac{\pi}{2}$ si ha:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}\sin\left(\frac{n}{2}\pi\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{2k+1}\sin\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{2k+1}\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2\cdot(-1)^k}{2k+1}$$

PERCHÉ PER n PARI SI HA $\sin\left(\frac{n}{2}\pi\right) = 0$

Di conseguenza si ottiene:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)\cdot 1 = \frac{\pi}{4}$$

P.2 **a** La condizione che $v(x)$ soddisfa può riscriversi come:

$$v(x) * e^{-|x|} = \frac{1}{1+x^2} - \left(e^{-x^2}\right)'$$

Passando in ambo i membri alla trasformata di Fourier si ottiene:

$$\hat{v}(\lambda) \cdot \frac{2}{1+\lambda^2} = \pi e^{-|\lambda|} - (i\lambda)\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

da cui segue:

$$\hat{v}(\lambda) = \frac{\pi}{2}(1+\lambda^2)\left(e^{-|\lambda|} - \frac{i\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}\right)$$

b Basta osservare che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\, dx = \hat{v}(0) = \frac{\pi}{2}$$

P.3 **a** La verifica che, per ogni fissato intero positivo n, T_n è una distribuzione si può, ovviamente, fare anche a mano nel solito modo, tuttavia il modo più comodo è quello di osservare che, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, si ha:

$$T_n(\varphi) = n \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(x)\left(\varphi(x) - \varphi\left(x+\frac{1}{n}\right)\right) dx = n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)\, dx - n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(x)\, \varphi\left(x+\frac{1}{n}\right) dx =$$

$$= n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x)\, dx - n \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}\left(x-\frac{1}{n}\right)\varphi(x)\, dx =$$

$$= n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}\left(x-\frac{1}{n}\right)\right)\varphi(x)\, dx = 2n \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\, \varphi(x)\, dx$$

In tal modo, dal fatto che $\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$ è in L^1 segue che T_n è una distribuzione. Dallo stesso motivo segue anche che T_n ha ordine 0, rispondendo così alla prima parte del punto (b).

b Che l'ordine di ogni T_n sia 0 è già stato visto.

Rimane da verificare che, per ogni n, il supporto di T_n è $[0,\frac{1}{n}]$, cioè che l'aperto massimale sul quale T_n si annulla è $(-\infty,0)\cup(\frac{1}{n},+\infty)$.
Dobbiamo quindi verificare le solite 2 cose:

(1) per ogni $\varphi\in\mathcal{D}$ tale che $supp(\varphi)\subset(-\infty,0)\cup(\frac{1}{n},+\infty)$ si ha $T(\varphi)=0$;

(2) se A è un aperto non contenuto in $(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{n},+\infty\right)$ allora esiste $\varphi\in\mathcal{D}$, tale che $supp(\varphi)\subset A$ e $T(\varphi)\neq 0$.

La verifica di **(1)** è ovvia, perché se $supp(\varphi)\subset(-\infty,0)\cup(\frac{1}{n},+\infty)$ allora $\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\cdot\varphi(x)$ è identicamente nulla.
Quanto a **(2)**, se A non è contenuto in $(-\infty,0)\cup(\frac{1}{n},+\infty)$ allora conterrà un punto $x_0\in[0,\frac{1}{n}]$ ed essendo aperto conterrà almeno anche tutto un semiintorno di x_0, dove sarà possibile ritagliare un intervallo non degenere $[a,b]\subset A\cap[0,\frac{1}{n}]$
Basterà dunque prendere la solita funzione a campana $\varphi(x)$ col supporto contenuto in $[a,b]$ (e quindi anche in A) per avere:

$$T_n(\varphi)=2n\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\,\varphi(x)\,dx=2n\int_0^{\frac{1}{n}}\varphi(x)\,dx=2n\int_a^b\varphi(x)\,dx>0$$

Possiamo quindi concludere che $(-\infty,0)\cup(\frac{1}{n},+\infty)$ è l'aperto massimale in cui T si annulla e quindi il supporto di T è il suo complementare $[0,\frac{1}{n}]$.

$\boxed{c}$ Per ogni fissato $\varphi\in\mathcal{D}$, per ogni n intero positivo, si ha:

$$T_n(\varphi)=2n\int_{-\infty}^{+\infty}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)\,\varphi(x)\,dx=2n\int_0^{\frac{1}{n}}\varphi(x)\,dx=\frac{2}{\frac{1}{n}-0}\int_0^{\frac{1}{n}}\varphi(x)\,dx=2\varphi(\xi_n)\quad\text{con } 0<\xi_n<\frac{1}{n}$$

PER IL TEOREMA DELLA MEDIA

Di conseguenza, essendo φ continua, si ha:

$$T_n(\varphi)=2\varphi(\xi_n)\to 2\varphi(0)\quad\text{per } n\to+\infty$$

PERCHÈ, ESSENDO $0<\xi_n<\frac{1}{n}$, SI HA $\xi_n\to 0$ PER $n\to+\infty$

Questo significa che $T_n\xrightarrow{\mathcal{D}'}2\delta_0$, dove δ_0 è la delta di Dirac centrata in 0.