Metodi Matematici 17/09/2018 - III Sessione -II Appello

Titolo nota

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Su $C^1([-1,1])$ si consideri il solito prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.
Poniamo $f(x) = x\cdot|x|$ e $M = \mathrm{Span}\{1, x, x^2\} \subset C^1([-1,1])$.

a) Trovare la proiezione di $f(x)$ su M.

b) Trovare $g(x) \in C^1([-1,1]) - M$ tale che $g \neq f$ ma la proiezione di g su M sia la stessa di f.

FACOLTATIVO c) Trovare un'altra $h(x) \in C^1([-1,1])$ con la stessa proiezione di f su M ma con $h \notin \mathrm{Span}\{f,g\}$.

2) Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x) = \frac{x+3}{(x^2+4x+8)^2}$, poi utilizzarla per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

3) Per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ definiamo $T_n(\varphi) = n^3 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(2x) - \varphi(x)\,dx$.

a) Mostrare che, per ogni n, $T_n \in \mathcal{D}'$.

b) Trovare ordine e supporto di T_n, motivando la risposta.

c) Trovare, se esiste, $T \in \mathcal{D}'$ tale che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$, motivando la risposta.

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) Enunciare e dimostrare il teorema della proiezione.

2) Dare la definizione di Trasformata di Fourier di una distribuzione temperata ed esibirne un esempio.

3) Dare la definizione di ordine di una distribuzione ed esibire un esempio di distribuzione di ordine 1.

Soluzioni Prima Parte

1 **a** Si noti che $\mathrm{Span}\{1, x^2\}$ e $\mathrm{Span}\{x\}$ sono tra loro perpendicolari e che $f(x) = x|x|$, essendo dispari, è perpendicolare a $\mathrm{Span}\{1, x^2\}$.

Di conseguenza la proiezione di f su M coincide con quella su $\mathrm{Span}\{x\}$, che è:

$$\Pi_f(x) = \frac{\langle f(x), x\rangle}{\|x\|^2} \cdot x = \frac{\int_{-1}^{1} x \cdot |x| \cdot x \, dx}{\int_{-1}^{1} x \cdot x \, dx} \cdot x = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} x = \frac{3}{4} x$$

b Per ottenere una $g(x)$ tale che la sua proiezione sia sempre $\Pi_f(x)$ basta aggiungere a $\Pi_f(x)$ una funzione che sia perpendicolare a M ma diversa da $f(x) - \Pi_f(x)$.

La scelta più semplice è quella di prendere:

$$g(x) = \Pi_f(x) - \left(f(x) - \Pi_f(x)\right) = 2\Pi_f(x) - f(x) = \frac{3}{2} x - x \cdot |x|$$

c Ci serve una funzione $\varphi(x)$ che stia in $M^\perp$ ma non sia del tipo $\lambda \cdot \left(f(x) - \Pi_f(x)\right)$.

Un modo per costruirla è di proiettare un'altra funzione $\psi(x)$ su M e di prendere $\varphi(x) = \psi(x) - \Pi_\psi(x)$.

Se ad esempio prendiamo $\psi(x) = x^3$, essendo dispari, la sua proiezione su M coincide con quella su $\mathrm{Span}\{x\}$, che è:

$$\Pi_\psi(x) = \frac{\langle \psi(x), x\rangle}{\|x\|^2} \cdot x = \frac{\int_{-1}^{1} x^3 \cdot x \, dx}{\int_{-1}^{1} x \cdot x \, dx} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} x = \frac{3}{5} x$$

Da cui segue che prendendo

$$\varphi(x) = \psi(x) - \Pi_\psi(x) = x^3 - \frac{3}{5} x$$

si ottiene $\varphi(x) \in M^\perp$.

Di conseguenza se si prende

$$h(x) = \Pi_f(x) + \varphi(x) = \frac{3}{4} x + x^3 - \frac{3}{5} x = x^3 + \frac{3}{20} x$$

si ottiene $\Pi_h(x) = \Pi_f(x)$.

Ma $h(x) \notin \mathrm{Span}\{f, g\}$ perché è un polinomio di 3° grado, quindi $h(x)$ soddisfa le condizioni richieste.

2 Si ha:

$$f(x)=\frac{x+3}{(x^2+4x+8)^2}=\frac{(x+2)+1}{((x+2)^2+4)^2}=g(x+2)$$

dove:

$$g(x)=\frac{x+1}{(x^2+4)^2}=\frac{x}{(x^2+4)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{4+x^2-x^2}{(x^2+4)^2}=$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+4}\right)'+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+4}-\frac{1}{4}x\cdot\frac{x}{(x^2+4)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+4}\right)'+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+4}-\frac{1}{4}x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+4}\right)'=$$

$$=-\frac{1}{2}\,h'(x)+\frac{1}{4}h(x)+\frac{i}{8}(-ix)\,h'(x)$$

dove:

$$h(x)=\frac{1}{x^2+4}$$

e quindi

$$\hat{h}(\lambda)=\frac{\pi}{2}e^{-2|\lambda|}$$

Di conseguenza:

$$\hat{g}(\lambda)=-\frac{1}{2}i\lambda\hat{h}(\lambda)+\frac{1}{4}\hat{h}(\lambda)+\frac{i}{8}\left(i\lambda\hat{h}(\lambda)\right)'=$$

$$=-\frac{1}{2}i\lambda\frac{\pi}{2}e^{-2|\lambda|}+\frac{1}{4}\frac{\pi}{2}e^{-2|\lambda|}+\frac{i}{8}\left(i\lambda\frac{\pi}{2}e^{-2|\lambda|}\right)'=$$

$$=-\frac{\pi}{4}i\lambda e^{-2|\lambda|}+\frac{\pi}{8}e^{-2|\lambda|}-\frac{\pi}{16}(1-2|\lambda|)e^{-2|\lambda|}=$$

$$=-\frac{\pi}{16}e^{-2|\lambda|}\left(4i\lambda-2+1-2|\lambda|\right)=-\frac{\pi}{16}e^{-2|\lambda|}\left(4i\lambda-2|\lambda|-1\right)$$

Ma ricordando che $f(x)=g(x+2)$ si ottiene

$$\hat{f}(\lambda)=e^{2i\lambda}\hat{g}(\lambda)=-\frac{\pi}{16}e^{2i\lambda-2|\lambda|}\left(4i\lambda-2|\lambda|-1\right)$$

Si osservi infine che $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\hat{f}(0)=\frac{\pi}{16}$

---

3 **a** **b** Per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ e per ogni $\varphi\in\mathcal{D}$, si ha:

$$T_n(\varphi)=n^3\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\varphi(2x)-\varphi(x)\,dx=n^3\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\varphi(2x)\,dx-n^3\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\varphi(x)\,dx=$$

$$= n^3 \int_{-\frac{2}{n}}^{\frac{2}{n}} \varphi(t) \cdot \frac{1}{2}\, dt - n^3 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(x)\, dx =$$

$$= n^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \chi_{[-\frac{2}{n}, \frac{2}{n}]}(x) \cdot \varphi(x)\, dx - n^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(x) \cdot \varphi(x)\, dx =$$

$$= n^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \chi_{[-\frac{2}{n}, \frac{2}{n}]}(x) - \chi_{[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]}(x) \right) \varphi(x)\, dx$$

Quindi $T_n(\varphi)$ è della forma $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx$, con $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Di conseguenza sappiamo che è una distribuzione di ordine 0.
Per quanto riguarda il suo supporto, per mostrare che il supporto di T_n è $[-\frac{2}{n}, \frac{2}{n}]$ si procede nel solito modo mostrando che l'aperto massimale su cui T_n si annulla è $(-\infty, -\frac{2}{n}) \cup (\frac{2}{n}, +\infty)$.
I dettagli sono del tutto analoghi a quelli del compito d'esame precedente.

$\boxed{C}$ Applicando la formula di Taylor col resto di Lagrange a φ, si ottiene

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \varphi''(0) \cdot \frac{x^2}{2} + \varphi'''(\xi_x) \cdot \frac{x^3}{6} \quad \text{con } \xi_x \text{ compreso tra } 0 \text{ e } x$$

e

$$\varphi(2x) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot 2x + \varphi''(0) \cdot \frac{4x^2}{2} + \varphi'''(\mu_x) \frac{8x^3}{6} \quad \text{con } \mu_x \text{ compreso tra } 0 \text{ e } 2x$$

Di conseguenza, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ e per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, si ha:

$$T_n(\varphi) = n^3 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi(2x) - \varphi(x)\, dx =$$

$$= n^3 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi'(0) \cdot x + \varphi''(0) \cdot \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{6}\left(8\varphi'''(\mu_x) - \varphi'''(\xi_x)\right) \cdot x^3\, dx =$$

$$= \underbrace{n^3 \varphi'(0) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x\, dx}_{A_n} + \underbrace{n^3 \cdot \frac{3}{2} \varphi''(0) \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x^2\, dx}_{B_n} + \underbrace{\frac{1}{6} n^3 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left(8\varphi'''(\mu_x) - \varphi'''(\xi_x)\right) x^3 dx}_{C_n}$$

Si noti che:

$$A_n = n^3 \cdot \varphi'(0) \cdot \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x \, dx = n^3 \cdot \varphi'(0) \cdot 0 = 0$$

$$B_n = n^3 \cdot \frac{3}{2} \varphi''(0) \cdot \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} x^2 \, dx = n^3 \cdot \frac{3}{2} \varphi''(0) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^3} = \varphi''(0)$$

$$|C_n| = \left| \frac{1}{6} n^3 \cdot \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left(8\varphi'''(\mu_x) - \varphi'''(\xi_x)\right) \cdot x^3 \, dx \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{6} n^3 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \left| 8\varphi'''(\mu_x) - \varphi'''(\xi_x) \right| \cdot |x^3| \, dx \leq$$

$$\leq \frac{1}{6} n^3 \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \| 9\varphi''' \|_\infty \cdot |x^3| \, dx =$$

$$= \frac{3}{2} \|\varphi'''\|_\infty \cdot n^3 \cdot 2 \int_0^{\frac{1}{n}} x^3 \, dx = 3 \|\varphi'''\|_\infty \, n^3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^4} = \frac{3}{4} \|\varphi'''\|_\infty \cdot \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Quindi, per ogni fissato $\varphi \in \mathcal{D}$, si ha:

$$T_n(\varphi) = 0 + \varphi''(0) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Di conseguenza $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$ dove $T : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi''(0)$