Metodi Matematici 26/01/2019 - I Sessione - I Appello

Titolo nota

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Data la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ definita da $f_n(x)=\frac{1}{n}\chi_{[n,2n]}(x)$, per ogni $x\in\mathbb{R}$.

a) Studiarne la convergenza in $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ e $L^\infty(\mathbb{R})$.

b) Dire, motivando la risposta, se esiste $g\in L^1(\mathbb{R})$, tale che $\forall n\in\mathbb{N}-\{0\}$ e $\forall x\in\mathbb{R}$ si abbia $f_n(x)\leq g(x)$

2) Sia $f\in L^1(\mathbb{R})$, derivabile e tale che anche $f'\in L^1(\mathbb{R})$. Sappiamo inoltre che $f(x)+f'(x)=\frac{x}{(1+x^2)^2}$.

a) Trovare $\hat{f}(\lambda)$.

b) Trovare $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

3) Per ogni $n\in\mathbb{N}-\{0\}$ e per ogni $\varphi\in\mathcal{D}$ definiamo $T_n(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\arctan\frac{n}{x}\,dx$

a) Mostrare che, per ogni n, $T_n\in\mathcal{D}'$.

b) Per ogni n dire chi è T_n'.

c) Trovare $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ t.c. $T_n'\xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}T$, motivando la risposta

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) Esibire uno spazio di Banach che non sia di Hilbert, motivando in dettaglio il perché non può essere di Hilbert.

2) Ricavare la trasformata di Fourier di e^{-x^2}, giustificando tutti i passaggi.

3) Enunciare il teorema che fornisce, per i funzionali lineari su $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, una proprietà equivalente a quella di essere una distribuzione, poi dimostrare una delle 2 implicazioni (a scelta).

Soluzioni Prima Parte

P1 Si ha:

$$\| f_n \|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{n} \chi_{[n,2n]}(x) \right| dx = \frac{1}{n} \int_n^{2n} 1 \, dx = \frac{1}{n} \cdot (2n-n) = 1$$

$$\| f_n \|_{L^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} \chi_{[n,2n]}(x) \right)^2 dx = \frac{1}{n^2} \int_n^{2n} 1^2 \, dx = \frac{1}{n^2} \cdot (2n-n) = \frac{1}{n}$$

$$\| f_n \|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n} \cdot \chi_{[n,2n]}(x) = \frac{1}{n}$$

Di conseguenza $f_n \to 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ e $L^\infty(\mathbb{R})$ mentre $f_n \not\to 0$ in $L^1(\mathbb{R})$.
A dire il vero, in $L^1(\mathbb{R})$ non solo non converge a 0, ma non può convergere a nessun'altra funzione f, in quanto non è di Cauchy, visto che, per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\| f_{2^k} - f_{2^{k+1}} \|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{2^k} \chi_{[2^k, 2\cdot 2^k]}(x) - \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \chi_{[2^{k+1}, 2^{k+2}]}(x) \right| dx =$$

PERCHÈ GLI INTERVALLI $[2^k, 2^{k+1}]$ e $[2^{k+1}, 2^{k+2}]$ HANNO SOLO UN PUNTO IN COMUNE

$$= \frac{1}{2^k} \int_{2^k}^{2^{k+1}} 1 \, dx + \frac{1}{2^{k+1}} \int_{2^{k+1}}^{2^{k+2}} 1 \, dx = \frac{1}{2^k} \cdot 2^k + \frac{1}{2^{k+1}} \cdot 2^{k+1} = 1 + 1 = 2.$$

Per quanto riguarda il punto (b) la risposta è "NO", perché altrimenti, combinato col fatto che $f_n \to 0$ in L^∞, permetterebbe di applicare il teorema della convergenza dominata e concludere che $\int f_n \to \int 0 = 0$.
Cosa falsa, visto che $\int f_n \to 1$.

P.2 Osserviamo che:

$$\frac{x}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)'$$

e quindi:

$$\widehat{\left(\frac{x}{(1+x^2)^2} \right)}(y) = -\frac{1}{2} \widehat{\left(\frac{1}{1+x^2} \right)'}(\lambda) = -\frac{1}{2}(i\lambda) \widehat{\left(\frac{1}{1+x^2} \right)}(\lambda) = -\frac{1}{2} i \lambda \pi e^{-|\lambda|}$$

Se quindi prendiamo la trasformata di Fourier in ambo i membri di:

$$f'(x) + f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$

si ottiene:

$$i\lambda \hat{f}(\lambda) + \hat{f}(\lambda) = -\frac{\pi}{2} i\lambda e^{-|\lambda|}$$

da cui segue:

$$\hat{f}(\lambda) = -\frac{\pi i \lambda e^{-|\lambda|}}{2(1+i\lambda)}.$$

Per trovare $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ basta ricordare che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \hat{f}(0) = -\frac{\pi i \cdot 0 \cdot e^{-|0|}}{2\cdot(1+i\cdot 0)} = 0$$

P.3 Per mostrare che T_n è una distribuzione basta osservare che $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$ $\arctan\frac{n}{x} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Calcoliamo T_n'. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, preso $b>0$ in modo che supp $\varphi \subset (-b,b)$, si ha:

$$T_n'(\varphi) = -T_n(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) \arctan\frac{n}{x}\,dx = -\int_{-b}^{0} \varphi'(x)\arctan\frac{n}{x}\,dx - \int_{0}^{b}\varphi'(x)\arctan\frac{n}{x}\,dx =$$

$$= -\left[\varphi(x)\arctan\frac{n}{x}\right]_{-b}^{0} + \int_{-b}^{0}\varphi(x)\frac{-n}{x^2+n^2}\,dx - \left[\varphi(x)\arctan\frac{n}{x}\right]_{0}^{b} + \int_{0}^{b}\varphi(x)\frac{-n}{x^2+n^2}\,dx =$$

$$= +\frac{\pi}{2}\varphi(0) - \int_{-b}^{0}\varphi(x)\frac{n}{x^2+n^2}\,dx + \frac{\pi}{2}\varphi(0) - \int_{0}^{b}\varphi(x)\frac{n}{x^2+n^2}\,dx =$$

$$= \pi\varphi(0) - \int_{-b}^{+b}\varphi(x)\frac{n}{x^2+n^2}\,dx = \pi\delta_0(\varphi) - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n}{x^2+n^2}\varphi(x)\,dx.$$

Infine, per mostrare che $T_n' \xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})} \pi\delta_0$, basta osservare che, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, preso $b>0$ t.c. supp $\varphi \subset (-b,b)$ si ha:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n}{x^2+n^2}\varphi(x)\,dx\right| = \left|\int_{-b}^{b}\frac{n}{x^2+n^2}\varphi(x)\,dx\right| = \left|\int_{-\frac{b}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{1}{y^2+1}\varphi(ny)\,dy\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\frac{b}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{1}{y^2+1}\cdot|\varphi(ny)|\,dy \leq \int_{-\frac{b}{n}}^{\frac{b}{n}}\frac{1}{y^2+1}\cdot\|\varphi\|_\infty\,dy \leq \|\varphi\|_\infty\cdot\frac{2b}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{per } n\to+\infty$$
