Metodi Matematici 12/02/2019 - I Sessione - II Appello

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Sia $V = L^2([-2,2])$ dotato del solito prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_{-2}^{2} f(x)g(x)\,dx$. Sia inoltre $f(x) = x^2$ e $W = \text{span}\{g_0, g_1, g_2\}$ dove $g_0(x) = \frac{1}{2}$, $g_1(x) = \frac{1}{2} - \chi_{[-2,0]}(x)$, $g_2(x) = \frac{1}{2} - \chi_{[-1,0]\cup[1,2]}(x)$.
Trovare $d(f, W)$.

2) Sappiamo che $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $g(x) = x f(x)$ e $\hat{f}(\lambda) = \frac{5i\lambda}{(3+\lambda^2)^2}$.
a) Trovare $\hat{g}(\lambda)$.
b) Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx$.

3) Sia $T_0 : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $T_0(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx$.
a) Mostrare che T_0 è una distribuzione
b) Trovare ordine e supporto di T_0, motivando le risposte.
c) Trovare T_0'.
d) Trovare tutte le $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tali che $T' = T_0$

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

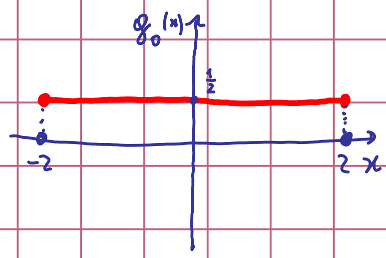
1) Dare la definizione di base di Hilbert ed esibirne un esempio in uno spazio di Hilbert a propria scelta.

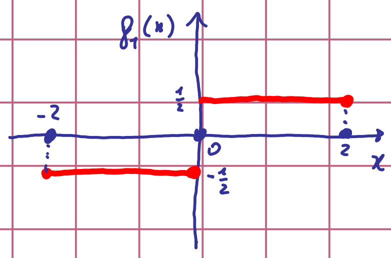
2) Enunciare e dimostrare il teorema che permette di trovare la trasformata di Fourier di $(-ix)f(x)$ sapendo quella di $f(x)$.

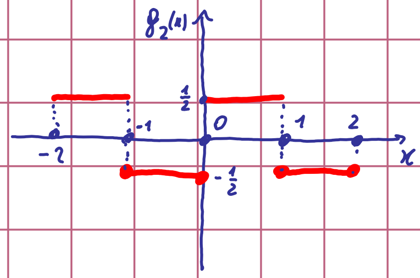
3) Definire $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ e dire cosa significa che una successione $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R})$ converge a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Soluzioni Prima Parte

P.1 Si osservi che i grafici di g_0, g_1 e g_2 sono i seguenti:







Quindi $\forall\, i = 0,1,2$ si ha:

$$\|g_i\|_2^2 = \int_{-2}^{2} \left(g_i(x)\right)^2 dx = \int_{-2}^{2} \frac{1}{4}\, dx = 1$$

Inoltre, $\forall\, i,j = 0,1,2$ con $i \neq j$ si ha:

$$\langle g_i, g_j \rangle = \int_{-2}^{2} g_i(x) \cdot g_j(x)\, dx = 0$$

PERCHÉ "METÀ" DEL GRAFICO STA A QUOTA $\frac{1}{4}$ E L'ALTRA "METÀ" A QUOTA $-\frac{1}{4}$

Quindi $\{g_0, g_1, g_2\}$ è un insieme ortonormale.

Grazie al T. della proiezione, la proiezione Π_f di f su W è data da:

$$\Pi_f(x) = \langle f, g_0 \rangle g_0 + \langle f, g_1 \rangle g_1 + \langle f, g_2 \rangle g_2 =$$

PERCHÉ f È PARI MENTRE g_1 E g_2 SONO DISPARI

$$= \left(\int_{-2}^{2} x^2 \cdot \frac{1}{2}\, dx \right) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot g_1 + 0 \cdot g_2 =$$

$$= \left[\frac{x^3}{6} \right]_{-2}^{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{6} - \frac{(-8)}{6} \right) = \frac{4}{3}$$

Di conseguenza:

$$d(f, W) = d(f, \Pi_f) = \sqrt{\int_{-2}^{2} \left(x^2 - \frac{4}{3}\right)^2 dx} = \sqrt{2 \int_0^2 x^4 - \frac{8}{3}x^2 + \frac{16}{9}\, dx} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8}{9}x^3 + \frac{16}{9}x \right]_0^2} = \sqrt{2\left(\frac{32}{5} - \frac{64}{9} + \frac{32}{9} \right)} = 8\sqrt{\frac{1}{5} - \frac{1}{9}} = \frac{16}{3\sqrt{5}}$$

P.2 Poiché:

$$g(x) = x f(x) = i \cdot (-ix) f(x)$$

si ha:

$$\hat{g}(\lambda) = \widehat{(i(-ix)f(x))}(\lambda) = i\,\widehat{((-ix)f(x))}(\lambda) = i\left(\hat{f}(\lambda)\right)' =$$

$$= i\left(\frac{5i\lambda}{(3+\lambda^2)^2}\right)' = -5\left(\frac{1}{(3+\lambda^2)^2} + \lambda\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{(3+\lambda^2)^3}\cdot 2\lambda\right)\right) =$$

$$= -\frac{5}{(3+\lambda^2)^2} + \frac{20\lambda^2}{(3+\lambda^2)^3}$$

Per il punto (b) basta osservare che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,dx = \hat{g}(0) = -\frac{5}{(3+0^2)^2} + \frac{20\cdot 0}{(3+0^2)^3} = -\frac{5}{9}$$

P.3 Osserviamo che T_0 è della forma T_f con $f(x) = \chi_{[0,1]}(x) \in L^1(\mathbb{R})$.
Questo garantisce che T_0 è una distribuzione di ordine 0.
Per mostrare che il supporto di T_0 è $[0,1]$ basta mostrare che $A = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ è l'aperto massimale in cui T_0 si annulla. Il fatto che $T_0(\varphi) = 0$ se $supp(\varphi) \subset A$ è ovvio, visto che in tal caso $\varphi(x)\cdot\chi_{[0,1]}(x)$ è identicamente nulla. Se ora B è un aperto non contenuto in A allora esisterebbe un intervallo $(a,b) \subset B \cap [0,1]$, quindi scegliendo come $\varphi(x)$ la solita funzione a campana con supporto contenuto in (a,b) avremo:

$$T_0(\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx > 0.$$

Questo significa che se $B \not\subset A$ allora T_0 non si annulla in B, quindi A è l'aperto massimale in cui T_0 si annulla. Ciò dimostra che il supporto di T_0 è $[0,1]$.

Per calcolare T_0' basta osservare che, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$T_0'(\varphi) = -T_0(\varphi') = -\int_0^1 \varphi'(x)\,dx = -\varphi(1) + \varphi(0) = \delta_0(\varphi) - \delta_1(\varphi)$$

dove δ_0 indica la delta di Dirac in 0 e δ_1 quella in 1.
Quindi:

$$T_0' = \delta_0 - \delta_1$$

Vediamo ora di trovare tutte le $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tali che $T' = T_0$.

Un candidato per T è T_g dove $g(x)$ è definita da:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x} \chi_{[0,1]}(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{per } x \le 0 \\ x & \text{per } x \in (0,1) \\ 1 & \text{per } x \ge 1 \end{cases}$$

Osserviamo che, essendo $\chi_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R})$, $g(x)$ è ben definita per ogni x. Si osservi inoltre che $g(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e che per ogni x, con $x \neq 0$ e $x \neq 1$, si ha $g'(x) = f(x)$.

Mostriamo che $T_g' = T_0$. $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ si ha:

$$(T_g)'(\varphi) = -T_g(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_0^1 x\,\varphi'(x)\,dx - \int_1^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\left[x\,\varphi(x)\right]_0^1 + \int_0^1 \varphi(x)\,dx - \left[\varphi(x)\right]_1^{\infty} =$$

$$= -\varphi(1) + T_0(\varphi) - (-\varphi(1)) = T_0(\varphi)$$

Quindi $(T_g)' = T_0$. Sappiamo quindi che tutte e sole le T t.c. $T' = T_0$ sono le distribuzioni del tipo:

$$T = T_g + T_c$$

dove c è una qualsiasi funzione costante.