Metodi Matematici 24/06/2019 - II Sessione - I Appello

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Sia $V = C([-\pi,\pi])$ dotato del solito prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ e siano $W = \{ f\in V \mid f(x)=0 \ \forall x\in[-\pi,0]\}$ ed $F(x)=|x|$. Trovare la serie di Fourier della proiezione di $F(x)$ su W.

2) Sia $f\in C^2(\mathbb{R})$ tale che $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$ e $f(x)-f''(x) = 2e^{-x^2}$.

a) Trovare $\hat{f}(\lambda)$.

b) Trovare $u(x)$ e $v(x)$ tali che $u * v = f$.

3) Per ogni $\varphi\in\mathcal{D}$ definiamo $T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{|x|}\varphi(x)\,dx$

a) Mostrare che $T\in\mathcal{D}'$.

b) Trovare ordine e supporto di T, motivando la risposta.

c) Calcolare T'.

d) Trovare $a\in\mathbb{R}$ ed $g\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ t.c. $\forall\varphi\in\mathcal{D}$ si abbia $T'(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\varphi(x)\,dx + a\delta_0$.

Soluzioni Prima Parte

P.1 Posto $F_1(x) = \begin{cases} x & \text{per } 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{per } -\pi \le x < 0 \end{cases}$ e $F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } 0 \le x \le \pi \\ -x & \text{per } -\pi \le x < 0 \end{cases}$

si ha $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ con $F_1(x) \in W$ e $F_2(x) \in W^\perp$.

Quindi la proiezione di $F(x)$ su W è $F_1(x)$.

La serie di Fourier di $F_1(x)$ è data da:

$$F_1(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \right)$$

dove:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(x) \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_1(x) \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx$$

Quindi:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \left(\frac{1}{n} \sin(nx) \right)' dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[x \cdot \frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \sin(nx)\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{n} \sin(n\pi) - 0 + \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} n \cdot (-\sin(nx))\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2} \cdot \left[\cos(nx) \right]_0^{\pi} = \frac{\cos(n\pi) - \cos 0}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \begin{cases} \underset{n \text{ dispari}}{=} -\dfrac{2}{\pi n^2} \\ \underset{n \text{ pari}}{=} 0 \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \left(-\frac{1}{n} \cos(nx) \right)' dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\left[-x \cdot \frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx)\, dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos(n\pi) + 0 + \frac{1}{n^2} \int_0^{\pi} n \cos(nx)\, dx \right) =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{\pi n^2}\left[\sin(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

P.2 Visto che f è sufficientemente regolare possiamo passare alla trasformata di Fourier in entrambi i membri di

$$f(x) - f''(x) = 2e^{-x^2}$$

ottenendo:

$$\hat{f}(\lambda) - (i\lambda)^2 \hat{f}(\lambda) = 2\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

cioè:

$$\hat{f}(\lambda) + \lambda^2 \hat{f}(\lambda) = 2\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

da cui segue:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{2}{1+\lambda^2} \cdot \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

Questo risponde al punto (a).

Per il punto (b) basta osservare che, posti $u(x) = e^{-|x|}$ e $v(x) = e^{-x^2}$, si ha:

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{2}{1+\lambda^2} \qquad \text{e} \qquad \hat{v}(\lambda) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$$

quindi:

$$\widehat{(u * v)}(\lambda) = \hat{u}(\lambda) \cdot \hat{v}(\lambda) = \frac{2}{1+\lambda^2} \cdot \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}} = \hat{f}(\lambda)$$

Di conseguenza:

$$f(x) = (u * v)(x)$$

P.3 Si noti che $f(x) = \frac{\arctan x}{|x|}$ è continua per ogni $x \neq 0$, mentre per $x = 0$ ha una discontinuità di tipo salto perché:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan x}{|x|} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\arctan x}{x} = 1$$

e

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\arctan x}{|x|} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\arctan x}{-x} = -1$$

Di conseguenza $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e quindi $T = T_f$ è una distribuzione di ordine 0.

Per mostrare che il supporto di T è tutto $\mathbb{R}$ bisogna mostrare che comunque si scelga un aperto A, T non si annulla in A. A tale scopo basta osservare che, qualsiasi sia l'aperto $A \subset \mathbb{R}$, è sempre possibile trovare un intervallo chiuso $I = [a,b] \subset A$ tale che $f(x) > 0$ in tutto I oppure $f(x) < 0$ in tutto I.

Ciò significa che basta prendere come $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ la solita funzione a campana col supporto contenuto in I per avere $T_f(\varphi) \neq 0$.

Questo dimostra che T_f non si annulla su alcun aperto A e quindi che il supporto di T_f è tutto $\mathbb{R}$.

Questo risponde alle domande (a) e (b).

Per calcolare T' osserviamo che, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, preso $[a,b]$ t.c. $a<0<b$ e $\mathrm{supp}(\varphi) \subset [a,b]$, si ha:

(1)
$$T'(\varphi) = -T(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan x}{|x|}\,\varphi'(x)\,dx = -\int_a^0 \frac{\arctan x}{-x}\,\varphi'(x)\,dx - \int_0^b \frac{\arctan x}{x}\,\varphi'(x)\,dx =$$
$$= \left[\left(\frac{\arctan x}{x}\right)\varphi(x)\right]_a^0 - \int_a^0 \left(\frac{\arctan x}{x}\right)'\varphi(x)\,dx - \left[\left(\frac{\arctan x}{x}\right)\varphi(x)\right]_0^b + \int_0^b \left(\frac{\arctan x}{x}\right)'\varphi(x)\,dx.$$

Si noti che:

$$\left(\frac{\arctan x}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot x - \arctan x}{x^2} = \frac{x-(1+x^2)\arctan x}{x^2(1+x^2)} = \frac{x-(1+x^2)\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)}{x^2(1+x^2)} = \frac{-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}{x^2(1+x^2)} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

e quindi la funzione

(2)
$$g(x) = \begin{cases} -\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)' & \text{per } x<0 \\ 0 & \text{per } x=0 \\ \left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)' & \text{per } x>0 \end{cases}$$

è continua su tutto $\mathbb{R}$. Di conseguenza $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Si ricordi anche che $\frac{\arctan x}{x} \to 1$ per $x \to 0$ e che $\varphi(x)=0$ se $x \notin (a,b)$.

Tenendo conto di tutto ciò la **(1)** diventa:

$$T'(\varphi) = \varphi(0) + \int_{-\infty}^0 -\left(\frac{\arctan x}{x}\right)'\varphi(x)\,dx + \varphi(0) + \int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)'\varphi(x)\,dx =$$
$$= 2\,\delta_0(\varphi) + \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\varphi(x)\,dx$$

dove $g(x)$ è data da **(2)**.

Questo risponde alle domande (c) e (d).