# Metodi Matematici 12/07/2019 - II Sessione - II Appello

## Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

**1)** Sia $V = C([-1,1])$ dotato del solito prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$ e sia $W = \{ f \in V \mid f(1) = f(-1) = 0\}$ e sia $f(x)$ la funzione costante uguale a 1.
Rispondere, motivando le risposte, alle seguenti domande: (a) $f \in W$? (b) $f \in \overline{W}$? (c) $f \in W^{\perp\perp}$?

**2)** Siano $f(x) = \dfrac{2}{(1+x^2)^2}$ e $g(x) = (f(x))^2$.

a) Trovare $\hat{f}(\lambda)$ e studiarne la regolarità.

b) Senza trovare $\hat{g}(\lambda)$, stimarne la regolarità.

**3)** Sia $T_0 : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $T_0(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx$.

a) Mostrare che $T_0$ è una distribuzione.

b) Trovare $T_0'$ e $T_0''$

c) Trovare tutte le $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tali che $T' = T_0$

d) Dire, motivando la risposta, se è possibile estendere $T_0$ a tutto $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in modo che sia una distribuzione temperata.

## Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

**1)** Enunciare il teorema della convergenza dominata e far vedere che senza l'ipotesi che esista una "funzione dominante" il teorema sarebbe falso.

**2)** Enunciare e dimostrare il teorema che permette di trovare la trasformata di Fourier di $f(x-x_0)$ sapendo quella di $f(x)$.

**3)** Dire, motivando la risposta, se esiste una successione $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ tale che $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R})} 0$ ma $\varphi_n \not\xrightarrow{\mathcal{D}(\mathbb{R})} 0$.

# Soluzioni Prima Parte

**P.1** Ovviamente $f \notin W$ perché $f(1)=f(-1)=1 \neq 0$. Tuttavia è facile costruire una successione $(f_n)$ di funzioni che stanno in $W$ tale che $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$.

Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, definiamo:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx+n & \text{per } -1 \le x \le -1+\frac{1}{n} \\ 1 & \text{per } -1+\frac{1}{n} < x < 1-\frac{1}{n} \\ -nx+n & \text{per } 1-\frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$


il cui grafico è rappresentato nella figura qui a fianco.

Siccome, per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, $f_n$ è banalmente continua e soddisfa $f_n(-1)=f_n(1)=0$, tutte le $f_n$ stanno in $W$.

Inoltre abbiamo:

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_{-1}^{1} (f_n(x)-f(x))^2 \, dx = 2\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} (f_n(x)-f(x))^2 \, dx \le 2\int_{1-\frac{1}{n}}^{1} 1 \, dx = \frac{2}{n}$$

Quindi

$$0 < \|f_n - f\|_2 < \sqrt{\frac{2}{n}} \to 0 \quad \text{per } n \to +\infty$$

Quindi $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$.

Ciò significa che $f \in \overline{W}$.

Infine osserviamo che $W \subset W^{\perp\perp}$ e che $W^{\perp\perp}$ è chiuso. Di conseguenza $\overline{W} \subset W^{\perp\perp}$ e quindi da $f \in \overline{W}$ segue anche che $f \in W^{\perp\perp}$.

---

**P.2** Si osservi che, posto $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si ha:

$$f(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} + x \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} + x\left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = 2g(x) + i(-ix)\, g'(x)$$

Poiché $\hat{g}(\lambda) = \pi e^{-|\lambda|}$, otteniamo:

$$\hat{f}(\lambda) = 2\hat{g}(\lambda) + i\left((i\lambda)\hat{g}(\lambda)\right)' = 2\pi e^{-|\lambda|} - \left(\pi\lambda e^{-|\lambda|}\right)' = 2\pi e^{-\lambda} - \pi(1-|\lambda|)e^{-|\lambda|} =$$

$$= \pi (1+|\lambda|) e^{-|\lambda|}$$

Il calcolo diretto, distinguendo i casi $\lambda<0$, $\lambda>0$ e $\lambda=0$, di $\hat{f}'$, $\hat{f}''$ e $\hat{f}'''$ mostra che $\hat{f} \in C^2$ ma $\hat{f} \notin C^3$. Tuttavia il fatto che $\hat{f}$ fosse almeno di classe $C^2$ si sarebbe potuto dedurre subito dal fatto che $f(x)$, $x f(x)$ e $x^2 f(x)$ stanno tutti in $L^1(\mathbb{R})$. Questo completa la risposta alla domanda (a).

Riguardo a (b) basta osservare che $g(x) = \frac{4}{(1+x^2)^4}$ e quindi $x^k g(x) \in L^1(\mathbb{R})$ per $k=0,1,2,3,\dots,6$, per poter dire che $\hat{g}(\lambda)$ è almeno di classe $C^6$.

---

**P.3** Si ha:

$$T_0(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{(-\infty,0]}(x)\, \varphi(x)\,dx$$

quindi, essendo $\chi_{(-\infty,0]}(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, sappiamo già che $T_0$ è una distribuzione.
Inoltre, poiché $\chi_{(\infty,0]}(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, sappiamo anche che $T_0$ è una distribuzione temperata.
Questo risponde alle domande (a) e (d).
Per la domanda (b) si osservi che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, preso $a<0$ t.c. $supp(\varphi) \subset (a,+\infty)$, si ha:

$$T_0'(\varphi) = -T_0(\varphi') = -\int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\,dx = -\int_{a}^{0} \varphi'(x)\,dx = -[\varphi(x)]_a^0 = -\varphi(0) = -\delta_0(\varphi)$$

dove $\delta_0$ è la delta di Dirac in 0.
Inoltre:

$$T_0''(\varphi) = (-\delta_0)'(\varphi) = \delta_0(\varphi') = \varphi'(0)$$

Questo risponde alla domanda (b).
Per la domanda (c) un candidato naturale per $T$ è $T_g$, prendendo $g$ in modo che $g'(x) = \chi_{(-\infty,0]}(x)$ per quasi ogni $x$.
Prendiamo quindi:

$$T(\varphi) = \int_{-\infty}^{0} x\, \varphi(x)\,dx$$

e mostriamo che $T' = T_0$.
Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, preso $a<0$ tale che $supp(\varphi) \subset (a,+\infty)$, si ha:

$$T'(\varphi) = -T(\varphi') = -\int_{-\infty}^{0} x\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{a}^{0} x\,\varphi'(x)\,dx = -[x\,\varphi(x)]_a^0 + \int_a^0 \varphi(x)\,dx =$$

$$= -0\,\varphi(0) + a\cdot\varphi(a) + \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\,dx = 0 + T_0(\varphi) = T_0(\varphi).$$

Una volta trovata una $T \in \mathcal{D}'$ t.c. $T' = T_0$, sappiamo già che tutte le altre sono del tipo $T + T_c$, con $c$ funzione costante.