Metodi Matematici 03/09/2019 - III Sessione - I Appello

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Data la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}-\{0\}}$ definita da $f_n(x)=\frac{1}{n+1}\chi_{[\sqrt{n},\sqrt{n+n}]}(x)$, per ogni $x\in\mathbb{R}$.

a) Studiarne la convergenza in $L^1(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$ e $L^\infty(\mathbb{R})$.

b) Dire, motivando la risposta, se esiste $g\in L^1(\mathbb{R})$, tale che $\forall n\in\mathbb{N}-\{0\}$ e $\forall x\in\mathbb{R}$ si abbia $f_n(x)\le g(x)$

2) Calcolare la trasformata di Fourier di $f(x)=\frac{x+2}{(x^2+2x+5)^2}$, poi utilizzarla per calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

3) Per ogni $\varphi\in\mathcal{D}$ definiamo $T(\varphi)=\int_1^4 \sqrt{x}\,\varphi(x)\,dx$.
Verificare che T è una distribuzione e trovarne ordine e supporto.
Trovare poi T'.

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) Sia $(V,\langle,\rangle)$ uno spazio con prodotto scalare e sia W un sottospazio di V.
Dire chi è $W^\perp$ e dimostrare che è un sottospazio chiuso di V.

2) Enunciare e dimostrare il teorema che permette di trovare la trasformata di Fourier di $f'(x)$ sapendo quella di $f(x)$.

3) Sia δ_0 la delta di Dirac in 0. Esibire, motivando la risposta, una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tale che $T_{f_n}\xrightarrow{\mathcal{D}'(\mathbb{R})}\delta_0$.

Soluzioni Prima Parte

P.1 Si ha:

$$\|f_n\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{n+1} \chi_{[\sqrt{n}, \sqrt{n}+n]}(x) \right| dx = \frac{1}{n+1} \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+n} 1 \, dx = \frac{1}{n+1} \cdot (\sqrt{n}+n-\sqrt{n}) = \frac{n}{n+1} \to 1$$

$$\|f_n\|_{L^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} \chi_{[\sqrt{n}, \sqrt{n}+n]}(x) \right)^2 dx = \frac{1}{(n+1)^2} \int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n}+n} 1^2 \, dx = \frac{1}{(n+1)^2} \cdot (\sqrt{n}+n-\sqrt{n}) = \frac{n}{(n+1)^2} \to 0$$

$$\|f_n\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n+1} \chi_{[\sqrt{n}, \sqrt{n}+n]}(x) \right| = \frac{1}{n+1} \to 0$$

Di conseguenza $f_n \to 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ e $L^\infty(\mathbb{R})$ mentre $f_n \not\to 0$ in $L^1(\mathbb{R})$.
A dire il vero, in $L^1(\mathbb{R})$ non solo non converge a 0, ma non può convergere a nessun'altra funzione f, in quanto non è di Cauchy. Infatti $\forall n \in \mathbb{N}-\{0\}$ basta prendere $m \in \mathbb{N}-\{0\}$ tale che $\sqrt{m} > \sqrt{n}+n$ in modo che gli intervalli $[\sqrt{n}, \sqrt{n}+n]$ e $[\sqrt{m}, \sqrt{m}+m]$ sono disgiunti e si ottiene:

$$\|f_n - f_m\|_{L^1} = \|f_n\|_{L^1} + \|f_m\|_{L^1} = \frac{n}{n+1} + \frac{m}{m+1} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

PERCHÉ $[\sqrt{n}, \sqrt{n}+n]$ E $[\sqrt{m}, \sqrt{m}+m]$ SONO DISGIUNTI

Per quanto riguarda il punto (b) la risposta è "NO", perché altrimenti, combinato col fatto che $f_n \to 0$ in L^∞, permetterebbe di applicare il teorema della convergenza dominata e concludere che $\int f_n \to \int 0 = 0$.
Cosa falsa, visto che $\int f_n \to 1$.

---

2 Si ha:

$$f(x) = \frac{x+2}{(x^2+2x+5)^2} = \frac{(x+1)+1}{((x+1)^2+4)^2} = g(x+1)$$

dove:

$$g(x) = \frac{x+1}{(x^2+4)^2} = \frac{x}{(x^2+4)^2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4+x^2-x^2}{(x^2+4)^2} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{x^2+4} \right)' + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{4} x \cdot \frac{x}{(x^2+4)^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2+4}\right)' + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{4}x\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+4}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}h'(x) + \frac{1}{4}h(x) + \frac{i}{8}(-ix)h'(x)$$

dove:

$$h(x) = \frac{1}{x^2+4}$$

e quindi

$$\hat{h}(\lambda) = \frac{\pi}{2}e^{-2|\lambda|}$$

Di conseguenza:

$$\hat{g}(\lambda) = -\frac{1}{2}i\lambda\hat{h}(\lambda) + \frac{1}{4}\hat{h}(\lambda) + \frac{i}{8}\left(i\lambda\hat{h}(\lambda)\right)' =$$

$$= -\frac{1}{2}i\lambda\frac{\pi}{2}e^{-2|\lambda|} + \frac{1}{4}\frac{\pi}{2}e^{-2|\lambda|} + \frac{i}{8}\left(i\lambda\frac{\pi}{2}e^{-2|\lambda|}\right)' =$$

$$= -\frac{\pi}{4}i\lambda e^{-2|\lambda|} + \frac{\pi}{8}e^{-2|\lambda|} - \frac{\pi}{16}(1-2|\lambda|)e^{-2|\lambda|} =$$

$$= -\frac{\pi}{16}e^{-2|\lambda|}\left(4i\lambda - 2 + 1 - 2|\lambda|\right) = -\frac{\pi}{16}e^{-2|\lambda|}\left(4i\lambda - 2|\lambda| - 1\right)$$

Ma ricordando che $f(x) = g(x+1)$ si ottiene

$$\hat{f}(\lambda) = e^{i\lambda}\hat{g}(\lambda) = -\frac{\pi}{16}e^{i\lambda-2|\lambda|}\left(4i\lambda - 2|\lambda| - 1\right)$$

Si osservi infine che $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \hat{f}(0) = \frac{\pi}{16}$

$\boxed{P.3}$ Osserviamo che

$$T(\varphi) = \int_1^4 \sqrt{x}\,\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x}\cdot\chi_{[1,4]}(x)\,\varphi(x)\,dx$$

e che la funzione $\sqrt{x}\cdot\chi_{[1,4]}(x)$ è in $L^1(\mathbb{R})$, possiamo quindi citare il fatto (già noto) che se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$ è una distribuzione di ordine 0.

Per mostrare che il suo supporto è $[1,4]$ bisogna dimostrare che l'aperto massimale su cui T si annulla è $A = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$, cioè bisogna dimostrare le 2 seguenti affermazioni:

1. Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ il cui supporto sia contenuto in A si ha $T(\varphi) = 0$.
   (Questo è ovvio perché in tal caso $\sqrt{x} \cdot \chi_{[1,4]}(x) \cdot \varphi(x)$ è identicamente nulla)

2. Se B è aperto non contenuto in A allora esiste $\varphi \in \mathcal{D}$ tale che $T(\varphi) \neq 0$.
   Anche questo è abbastanza semplice da mostrare. Infatti se B è un aperto non contenuto in A, esisterà un intervallo non degenere I tale che $I \subset B \cap [1,4]$. Ma allora basta prendere φ funzione "a campana" di classe C^∞ col supporto tutto contenuto in I per avere che $T(\varphi) > 0$.

Quindi possiamo concludere che il supporto di T è $[1,4]$.

Per quanto riguarda T', per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha:

$$T'(\varphi) = -T(\varphi') = -\int_1^4 \sqrt{x}\, \varphi'(x)\, dx = -\left[\sqrt{x}\, \varphi(x)\right]_1^4 + \int_1^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \varphi(x)\, dx$$

$$= -2\varphi(4) + \varphi(1) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} \chi_{[1,4]}(x)\, \varphi(x)\, dx$$

Quindi:

$$T' = -2\delta_4 + \delta_1 + T_{\frac{1}{2\sqrt{x}} \chi_{[1,4]}(x)}$$

dove, come al solito, δ_{x_0} indica la delta di Dirac centrata in x_0 e, se $f \in L^1(\mathbb{R})$, T_f indica la distribuzione tale che $T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\, dx$.