Metodi Matematici 20/09/2019 - III Sessione - II Appello

Prima Parte (obbligatoria, tempo 1h e 30 min)

1) Su $C^1([-\pi,\pi])$ si consideri il solito prodotto scalare $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$.

Poniamo $f(x)=x$ e $M = \mathrm{Span}\{1, x^4, \sin x\} \subset C^1([-\pi,\pi])$.

a) Trovare la proiezione di $f(x)$ su M.

b) Trovare $g(x) \in C^1([-\pi,\pi]) - M$ tale che $g \neq f$ ma la proiezione di g su M sia la stessa di f.

2) Data $f(x) = (x+1)^2 e^{-(x-1)^2}$ calcolare $\hat{f}$. Usare il risultato per calcolare $\|f\|_{L^1}$.

3) Per ogni $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ definiamo $T_n(\varphi) = n\int_{-\infty}^{0} \varphi(x) - \varphi(x-\frac{1}{n})\,dx$

a) Mostrare che, per ogni n, $T_n \in \mathcal{D}'$.

b) Trovare ordine e supporto di T_n, motivando la risposta.

c) Trovare, se esiste, $T \in \mathcal{D}'$ tale che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T$, motivando la risposta.

d) Calcolare T'.

Seconda Parte (sostitutiva dell'orale e facoltativa, tempo 1h e 30 min)

1) Dare la definizione di base di Hilbert ed esibirne un esempio.

2) Enunciare e dimostrare il teorema che permette di trovare la trasformata di Fourier della convoluzione.

3) Dato $L : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ lineare, enunciare il teorema che fornisce una condizione equivalente al fatto che L sia una distribuzione.

Soluzioni Prima Parte

$\boxed{1}$ $\boxed{a}$ Si noti che $\mathrm{Span}\{1, x^4\}$ e $\mathrm{Span}\{\sin x\}$ sono tra loro perpendicolari e che $f(x) = x$, essendo dispari, è perpendicolare a $\mathrm{Span}\{1, x^4\}$.
Di conseguenza la proiezione di f su M coincide con quella su $\mathrm{Span}\{\sin x\}$, che è:

$$\Pi_f(x) = \frac{\langle f(x), \sin x\rangle}{\|\sin x\|^2} \sin x = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \, dx}{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx} \cdot \sin x = \frac{2\pi}{\pi} \sin x = 2 \sin x$$

$\boxed{b}$ Per ottenere una $g(x)$ tale che la sua proiezione sia sempre $\Pi_f(x)$ basta aggiungere a $f(x)$ una funzione che sia perpendicolare a M ma diversa da $f(x) - \Pi_f(x)$.

A tale scopo osserviamo che $h(x) = \sin(2x)$ è perpendicolare sia a 1 che a x^4 (perché è dispari) ed è perpendicolare anche a $\sin x$ perché:

$$\langle \sin 2x, \sin x\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} 2 \sin^2 x \cos x \, dx = \left[\frac{2}{3}(\sin x)^3\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Di conseguenza $h(x) = \sin 2x$ è perpendicolare a $\mathrm{Span}\{1, x^4, \sin x\}$, cioè a M.
Quindi basta prendere $g(x) = f(x) + h(x)$ perché la proiezione su M di $f(x) + h(x)$ è uguale a quella di $f(x)$.

$\boxed{2}$ Notiamo che:

$$(\star) \qquad f(x) = (x+1)^2 \cdot e^{-(x-1)^2} = g(x-1)$$

dove si è posto:

$$g(x) = (x+2)^2 e^{-x^2}.$$

Ora, posto $h(x) = e^{-x^2}$, sappiamo che $\hat{h}(\lambda) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$, quindi per calcolare $\hat{g}(\lambda)$ basta osservare che:

$$g(x) = (x+2)^2 e^{-x^2} = (x^2+4x+4)\, h(x) = -(-ix)^2 h(x) + 4i(-ix) h(x) + 4h(x)$$

e quindi:

$$\hat{g}(\lambda) = -\left(\hat{h}(\lambda)\right)'' + 4i\left(\hat{h}(\lambda)\right)' + 4\hat{h}(\lambda) =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-\frac{\lambda^2}{4}}(\lambda^2-2) - 2i\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \cdot \lambda + 4\sqrt{\pi} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \left(\lambda^2 + 8i\lambda - 18\right)$$

A questo punto da $(\ast)$ segue che:

$$\hat{f}(\lambda) = e^{-i\lambda}\, \hat{g}(\lambda) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} e^{-i\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{4}} \left(\lambda^2 + 8i\lambda - 18\right)$$

Per calcolare $\|f\|_{L^1(\mathbb{R})}$ sapendo la trasformata di Fourier di f basta osservare che, essendo f positiva, si ha:

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \hat{f}(0) = \frac{9}{2}\sqrt{\pi}$$

---

3 **a** $\forall n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ si ha:

$$T_n(\varphi) = n \int_{-\infty}^{0} \left(\varphi(x) - \varphi\left(x - \tfrac{1}{n}\right)\right) dx = n \left(\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx - \int_{-\infty}^{0} \varphi\left(x - \tfrac{1}{n}\right) dx \right) =$$

$$= n \left(\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx - \int_{-\infty}^{-\frac{1}{n}} \varphi(x)\, dx \right) = n \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \varphi(x)\, dx = n \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[-\frac{1}{n},0]}(x) \cdot \varphi(x)\, dx$$

Siccome $\chi_{[-\frac{1}{n},0]}(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ possiamo affermare che T_n è una distribuzione.

b Dal fatto che $\chi_{[-\frac{1}{n},0]}(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ segue anche che T_n ha ordine zero.
Dimostriamo ora che $\text{supp}(T_n) = [-\frac{1}{n}, 0]$, cioè che $A = (-\infty, \frac{1}{n}) \cup (0, +\infty)$ è l'aperto massimale in cui T_n si annulla.
Che T_n si annulli in A è ovvio, perché se $\text{supp}\,\varphi \subset A$ allora $\chi_{[-\frac{1}{n},0]}(x) \cdot \varphi(x)$ è identicamente nulla e quindi $T_n(\varphi) = 0$.
Inoltre se B è un aperto tale che $B \not\subset A$, allora è sempre possibile trovare un intervallo I non degenere tale che $I \subset B \cap [-\frac{1}{n}, 0]$. Presa dunque $\varphi \in \mathcal{D}$ tale che $\text{supp}(\varphi) \subset I$ con $\int_I \varphi(x)\, dx \neq 0$ si avrà:

$$T_n(\varphi) = n \int_{-\frac{1}{n}}^{0} \varphi(x)\, dx = n \int_I \varphi(x)\, dx \neq 0$$

Esiste quindi una $\varphi \in \mathcal{D}$ t.c. $\text{supp}(\varphi) \subset I \subset B$ e $T_n(\varphi) \neq 0$.
Ciò significa che se $B \not\subset A$ allora T_n non si annulla in B.

quindi $A = (-\infty, -\frac{1}{n}) \cup (0, +\infty)$ è l'aperto massimale in cui T_n si annulla e, di conseguenza $[-\frac{1}{n}, 0]$ è il supporto di T_n.

$\boxed{c}$ Mostriamo che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0$ dove δ_0 è la delta di Dirac in 0.

$\forall \varphi \in \mathcal{D}$ si ha:

$$T_n(\varphi) - \delta_0(\varphi) = n\int_{-\frac{1}{n}}^{0} \varphi(x)\,dx - \varphi(0) = n\int_{-\frac{1}{n}}^{0} \varphi(x)\,dx - \varphi(0)\cdot n\int_{-\frac{1}{n}}^{0} 1\,dx =$$

$$\boxed{x < \xi_x < 0}$$

$$= n\int_{-\frac{1}{n}}^{0} \varphi(x) - \varphi(0)\,dx \underset{\boxed{\text{TEO. DI LAGRANGE}}}{=} n\int_{-\frac{1}{n}}^{0} x\,\varphi'(\xi_x)\,dx$$

Quindi:

$$\left|T_n(\varphi) - \delta_0(\varphi)\right| = \left| n\int_{-\frac{1}{n}}^{0} x\,\varphi'(\xi_x)\,dx \right| \leq n\int_{-\frac{1}{n}}^{0} |x|\cdot \|\varphi'\|_\infty\,dx$$

$$= \|\varphi'\|_\infty \cdot n \cdot \int_{-\frac{1}{n}}^{0} |x|\,dx = \|\varphi'\|_\infty \cdot n \cdot \frac{1}{2n^2} = \frac{\|\varphi'\|_\infty}{2n} \xrightarrow{\boxed{n\to+\infty}} 0$$

Quindi $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(\varphi) = \delta_0(\varphi)$$

Ciò significa che $T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta_0$.

$\boxed{d}$ Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$ si ha:

$$T'(\varphi) = -T(\varphi') = -\delta_0(\varphi') = -\varphi'(0)$$

Quindi T' è la distribuzione $T' : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$
$\varphi \mapsto -\varphi'(0)$.