ZANICHELLI

Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore
Ministero della Pubblica Istruzione

Best Western

Gara Nazionale Classi Prime 2014

Problemi

Nella lista che segue la risposta corretta è sempre la **A**. *Ovviamente nelle* 36 *versioni del test che sono state fornite ai responsabili locali per la gara, sia le risposte che i problemi erano permutati in modo casuale.*

I problemi più semplici sono stati marcati col simbolo $\mathcal{F}$.

1. $\mathcal{F}$ Calcolare: $\dfrac{(2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5)^9}{(16 \cdot 16^2 \cdot 16^3 \cdot 16^4 \cdot 16^5)^2}$

[A] 2^{15} [B] 1 [C] 2 [D] $\frac{1}{2^{15}}$ [E] 2^{24} [F] $\frac{1}{2^{24}}$

2. $\mathcal{F}$ Qual è la somma degli angoli interni di un quadrilatero **concavo**?

[A] 360° [B] 300° [C] 390° [D] 420° [E] 480° [F] non è un valore fissato ma varia al variare del quadrilatero

3. $\mathcal{F}$ Un ladro deve scassinare una cassaforte e scopre, una settimana prima del furto, che la combinazione è **06108**. Purtroppo il giorno prima del furto viene a sapere che una delle cifre della combinazione (non si sa quale) è stata cambiata.
Qual è il numero minimo di tentativi che deve fare per essere sicuro di aprire la cassaforte?

[A] 45 [B] 5 [C] 10 [D] 9 [E] 25 [F] 55

4. $\mathcal{F}$ L'isola **Delle Sirene** ha sconfitto l'isola **Dei Pirati** e, come bottino di guerra, ha diritto ad un certo numero di banane. La *Legge della Pirateria* stabilisce che le banane siano ripartite tra le sirene in modo che ciascuna ne riceva lo stesso numero. Stabilisce anche che i pirati mettano insieme il bottino consegnando ciascuno la stessa quantità di banane. Sapendo che i pirati sono 432 e le sirene sono 600, dire qual è il minimo numero di banane che ogni pirata deve consegnare, affinché le sirene siano in grado di ripartirselo in parti uguali.

[A] 25 [B] 50 [C] 10 [D] 600 [E] 75 [F] nessuna delle altre risposte è corretta

5. $\mathcal{F}$ Sul display di una calcolatrice è scritto inizialmente il valore zero. La calcolatrice ha 4 tasti speciali: **Rosso**, **Verde**, **Bianco** e **Blu**. Se spingo il tasto **Rosso** il valore sul display raddoppia, se spingo il **Verde** viene elevato al quadrato, se spingo il **Bianco** gli viene sommato 1, se spingo il **Blu** gli viene tolto 10.
Qual è il valore più grande che posso ottenere sul display spingendo ciascuno dei quattro tasti una e una sola volta, nell'ordine che preferisco?

[A] 401 [B] 261 [C] 324 [D] 441 [E] 162 [F] nessuna delle altre risposte è esatta

6. $\mathcal{F}$ Nell'ottagono regolare $ABCDEFGH$ le diagonali AC e BE si intersecano nel punto P. Quanto vale l'angolo $\widehat{APE}$?

[A] $112,5°$ [B] 120° [C] $117,5°$ [D] 144° [E] 108° [F] $115,5°$

7. $\mathcal{F}$ In un sacchetto ci sono i 90 numeri della tombola: 90 tondini di legno numerati da 1 a 90. Me ne servono 2 tali che la loro somma sia un multiplo di 10. Ne prendo quindi una manciata alla cieca e spero, tra essi, di trovarne due che mi vadano bene.
Qual è la minima quantità di numeri che deve contenere la mia manciata, per essere certi che ciò accada?

[A] 39 [B] 11 [C] 46 [D] 10 [E] 54 [F] 19

8. $\mathcal{F}$ Di due numeri interi n e m sappiamo che il Massimo Comune Divisore è $2 \cdot 3^4 \cdot 5$ mentre il Minimo Comune Multiplo è $2^3 \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 7$. Con quanti zeri termina il prodotto $n \cdot m$?

[A] 3 [B] 4 [C] 1 [D] 2 [E] più di 4 [F] non determinabile univocamente dai soli dati forniti

9. Nel triangolo ABC si ha $AB = 60$cm e $AC = 50$cm. Prendiamo P sul lato AB e Q sul lato AC in modo che $AP = AQ = 10$cm. Se l'area di ABC è 720cm^2, quanto vale, in cm^2 l'area del triangolo APQ?

[A] 24 [B] 32 [C] 20 [D] 18 [E] 36 [F] non è determinabile dai soli dati forniti

10. Mettiamo in fila tutti i possibili monomi (con coefficiente 1) nelle variabili x e y e grado non superiore a 20, nel modo seguente:

$$x^{20}, \quad x^{19}y, \quad x^{19}, \quad x^{18}y^2, \quad x^{18}y, \quad x^{18}, \quad x^{17}y^3, \quad x^{17}y^2, \quad \dots$$

dove, per stabilire l'ordine dei monomi nella lista, si sono usate le seguenti regole:

(**a**) chi ha l'esponente della x più alto ha la precedenza;

(**b**) a parità di esponenti della x, ha la precedenza chi ha l'esponente della y più alto.

Che posizione occupa nella lista il monomio x^7y^{10}?

[A] 95^a [B] 214^a [C] 89^a [D] 147^a [E] 144^a [F] 72^a

11. Nel trapezio $ABCD$ la base maggiore AB è il doppio della base minore CD. Congiungendo i punti medi dei lati obliqui, il trapezio rimane diviso in due parti di area α e β (α è la più piccola e β la più grande). Qual è il rapporto tra α e β?

[A] $\frac{5}{7}$ [B] $\frac{1}{2}$ [C] $\frac{2}{3}$ [D] $\frac{3}{4}$ [E] $\frac{7}{9}$ [F] non è determinabile dai soli dati forniti

12. Si considerino i polinomi:

$$p(x) = x^2 + x + 1, \qquad q(x) = x^4 + x^2 + 1, \qquad h(x) = x^4 + 64$$

Quali, tra essi, NON sono ulteriormente scomponibili come prodotto di due polinomi a coefficienti interi di grado strettamente più basso?

[A] solo $p(x)$ [B] nessuno [C] tutti [D] solo $p(x)$ e $q(x)$ [E] solo $h(x)$ [F] solo $p(x)$ e $h(x)$

13. Dire quanti sono i divisori positivi di $n = 1122^2 - 121$ (contando anche 1 ed n).

[A] 12 [B] 121 [C] 30 [D] 9 [E] 36 [F] 6

14. Sostituendo 2014 al posto della x nel polinomio $x^5 - 5x^3 + 4x$ si ottiene un valore intero n. Per quale dei seguenti numeri NON è divisibile n?

[A] 25 [B] 65 [C] 30 [D] 35 [E] 45 [F] 55

15. Un terreno rettangolare coi lati di 20 e 50 metri viene suddiviso in 10 quadrati uguali, ciascuno dei quali viene seminato con una coltura a scelta tra carote, patate e rape, ma facendo in modo che due quadrati col lato in comune siano sempre coltivati in modo diverso. In quanti modi diversi si può farlo?

[A] 486 [B] 512 [C] 1024 [D] 472 [E] 720 [F] 392

16. Si considerino i numeri $a = 190125$, $b = 119025$, $c = 129015$, $d = 110925$ ed $e = 112095$. Quanti di essi sono dei quadrati perfetti?

[A] 1 [B] 0 [C] 2 [D] 3 [E] 4 [F] 5

17. Ogni casella di una tabella quadrata di lato n viene colorata di bianco o di nero in modo che valga la seguente proprietà:

> *comunque si prenda una sua sottotabella quadrata, questa ha le quattro caselle di vertice che sono 2 bianche e 2 nere.*

Qual è il massimo valore che può avere il lato n della scacchiera?

[A] 4 [B] 3 [C] 5 [D] 6 [E] il massimo è un intero maggiore di 6 [F] non c'è massimo perché, per quanto sia grande la scacchiera, è sempre possibile trovarne una colorazione che soddisfi la proprietà richiesta

18. Del polinomio $p(x)$ sappiamo che dividendolo per $(x - 1)$ si ottiene come resto 3, mentre dividendolo per $(x + 1)$ si ottiene come resto -7. Se lo si divide per $(x^2 - 1)$ che resto si ottiene?

[A] $5x - 2$ [B] $3x - 7$ [C] $4x - 3$ [D] -4 [E] -21 [F] non è possibile determinarlo dai soli dati forniti

Soluzioni

Soluzione del Quesito 1.

La risposta corretta è: 2^{15}.

Si ha:

$$\frac{\left(2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4\cdot 2^5\right)^9}{\left(16\cdot 16^2\cdot 16^3\cdot 16^4\cdot 16^5\right)^2}=\frac{\left(2^{15}\right)^9}{\left(16^{15}\right)^2}=\frac{\left(2^{15}\right)^9}{\left(\left(2^4\right)^{15}\right)^2}=\frac{\left(2^{15}\right)^9}{\left(2^{15}\right)^8}=2^{15}$$

Soluzione del Quesito 2.

La risposta corretta è: $360°$.

Basta osservare che è sempre possibile suddividere un quadrilatero concavo in due parti a forma di triangolo nel modo indicato in figura:

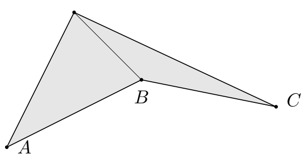

figura 1

In tal modo la somma degli angoli interni del quadrilatero è proprio la somma degli angoli interni dei due triangoli, cioè $180° + 180°$.

Soluzione del Quesito 3.

La risposta corretta è: 45.

Chi ha cambiato la combinazione può aver scelto quale cifra cambiare in 5 modi diversi, in ciascuno dei quali la cifra scelta può essere stata cambiata in 9 modi diversi. La combinazione iniziale potrebbe quindi essere stata cambiata in $5\cdot 9$, cioè 45, modi diversi.

Soluzione del Quesito 4.

La risposta corretta è: 25.

Si noti che il numero totale di banane da consegnare deve essere divisibile sia per 432 (il numero di pirati) che per 600 (il numero di sirene). Quindi la minima quantità possibile è il minimo comune multiplo di 432 e 600, cioè 10800, che corrisponde a 25 banane per ogni pirata.

Soluzione del Quesito 5.

La risposta corretta è: 401.

Il valore 401 si ottiene spingendo in sequenza: **Blu** (togliere 10), **Rosso** (raddoppiare), **Verde** (elevare al quadrato) e **Bianco** (aggiungere 1).

Per verificare che tutte le altre sequenze possibili danno un risultato più basso si può ovviamente provarle tutte (sono 23), tuttavia si può risparmiare un po' di tempo facendo le seguenti considerazioni:

(1) Senza usare il tasto **Verde** (elevamento al quadrato) il numero con il valore assoluto più alto che si riesce ad ottenere è -20 (che corrisponde appunto alla sequenza **Blu Rosso**) mentre tutti gli altri hanno valore assoluto minore o uguale a 19;

(2) se oltre al **Verde** si esclude anche il **Rosso** il numero con il valore assoluto più alto che si riesce ad ottenere è -10.

Ciò significa che, se si esclude la sequenza che fa ottenere 401, Il massimo numero che si pù ottenere dopo aver elevato al quadrato è $19^2 = 361$, se si è gia usato il tasto **Rosso**, mentre è 100 se non lo si è ancora usato.

In entrambi i casi, utilizzando gli eventuali tasti rimasti, non si riesce comunque a raggiungere 400.

Soluzione del Quesito 6.

La risposta corretta è: $\widehat{APE} = 112,5°$.

Visto che $\widehat{APE} = 180° - \widehat{AEP} - \widehat{PAE}$, basta trovare $\widehat{AEP}$ e $\widehat{PAE}$ (vedi figura 2).

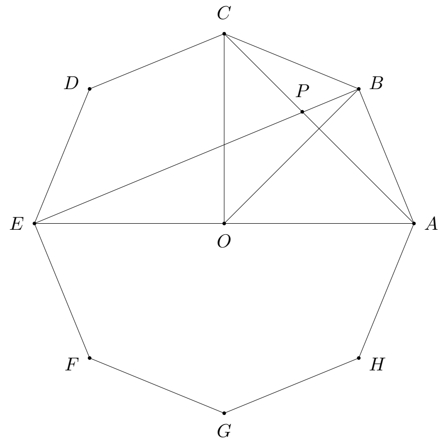

figura 2

Dal fatto che il triangolo AOC è rettangolo isoscele segue immediatamente che $\widehat{PAE} = 45°$.

Per quanto riguarda $\widehat{AEP}$, basta osservare che il triangolo EOB è isoscele su EB e ha l'angolo al vertice $\widehat{EOB}$ uguale a $\frac{3}{4}$ di angolo piatto, quindi

$$\widehat{AEP} = \frac{180° - 135°}{2} = 22,5°.$$

Possiamo quindi concludere che

$$\widehat{APE} = 180° - 22,5° - 45° = 112,5°.$$

Soluzione del Quesito 7.

La risposta corretta è: 39.

Per prima cosa si osservi che una manciata di 38 numeri potrebbe non bastare: basta prendere tutti i numeri che terminano per 6, 7, 8 o 9 (in tutto sono 36) poi un numero che termina per 5 e uno che termina per 0 e otteniamo 38 numeri tra i quali non è possibile sceglierne 2 la cui somma termini per zero.

La cosa invece è sempre possibile se la manciata contiene 39 numeri.

Per convincercene immaginiamo di ripartire questi 39 numeri in 6 sottoinsiemi:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \text{sottoinsieme dei numeri che terminano per } 0\\
A_1 &= \text{sottoinsieme dei numeri che terminano per } 1 \text{ o } 9\\
A_2 &= \text{sottoinsieme dei numeri che terminano per } 2 \text{ o } 8\\
A_3 &= \text{sottoinsieme dei numeri che terminano per } 3 \text{ o } 7\\
A_4 &= \text{sottoinsieme dei numeri che terminano per } 4 \text{ o } 6\\
A_5 &= \text{sottoinsieme dei numeri che terminano per } 5
\end{aligned}$$

Chiaramente se A_0 o A_5 contengono almeno 2 numeri, abbiamo trovato la nostra coppia di numeri la cui somma sia multipla di 10.

Se invece A_0 e A_5 contengono al massimo un numero ciascuno, rimangono almeno 37 numeri da ripartire tra gli altri 4 insiemi, quindi almeno uno di essi conterrà almeno 10 numeri.

Supponiamo, per fissare le idee, che l'insieme contenente 10 numeri sia A_1. In tal caso, siccome tra 1 e 90 i numeri che terminano con una fissata cifra sono 9, i 10 numeri di A_1 non possono terminare tutti con la stessa cifra: posso dunque sceglierne uno che inizia per 1 e un altro che inizia per 9, in tal modo ho trovato due numeri la cui somma è multipla di 10.

Lo stesso ragionamento si applica, ovviamente, anche nel caso in cui a contenere almeno 10 numeri siano A_2, A_3 o A_4.

Possiamo quindi colcludere che, se la nostra manciata di numeri ne contiene almeno 39, allora è sempre possibile sceglierne 2 aventi somma divisibile per 10. Il fatto che per 38 numeri questo non sia sempre possibile, ci garantisce che 39 è la minima quantità che ci permette di farlo.

Soluzione del Quesito 8.

La risposta corretta è: 3.

Infatti, anche se non posso determinate in modo univoco i due numeri n e m, posso dire che, nelle loro scomposizioni in fattori primi, uno dei due (anche se non so quale) ha il 5 con esponente 2 e mentre l'altro ce l'ha con esponente 1. Questo perchè in $\mathrm{mcm}(m,n)$ compare il fattore 5^2 mentre in $\mathrm{MCD}(m,n)$ compare il fattore 5. Posso quindi concludere che il prodotto $m\cdot n$ ha 5^3 nella scomposizione in fattori.

Con considerazioni del tutto analoghe posso concludere che nella scomposizione in fattori di $m\cdot n$ c'è 2^4.

Si può quindi concludere che $n\cdot m$ è divisibile per 10^3 ma non per 10^4, cioè che termina esattamente con 3 zeri, che è quanto volevamo mostrare.

Osserviamo che, facendo anche per gli altri fattori primi le stesse considerazioni che abbiamo fatto per 2 e per 5, si arriva alla conclusione che:

$$n\cdot m = \mathrm{mcm}(m,n)\cdot \mathrm{MCD}(m,n).$$

La spiegazione di questo e altri fatti elementari di aritmetica si può trovare nella video-lezione 5 del corso di preparazione di base disponibile, grazie all'UMI, alla pagina **www.problemisvolti.it/CorsoBaseOlimpiadiMatematica.html**.

Soluzione del Quesito 9.

La risposta corretta è: 24.
L'area del triangolo ABQ è 6 volte l'area del triangolo APQ (vedi figura 3) perché la base AB è 6 volte la base AP, mentre le altezze ad esse relative sono uguali.

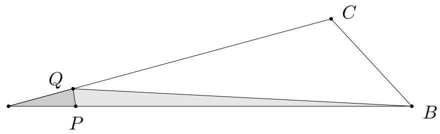

figura 3

Analogamente, sfruttando il fatto che $AC = 5\,AQ$, si mostra che l'area del triangolo ABC è 5 volte quella del triangolo ABQ.
Si può dunque concludere che l'area del triangolo ABC è 30 volte l'area del triangolo APQ. Di conseguenza, essendo la prima uguale a 720cm^2, la seconda deve essere 24cm^2.

Soluzione del Quesito 10.

La risposta corretta è: *occupa la posizione* 95^a.
Il problema si rivela più semplice se, anzichè scrivere la lista di monomi su una sola riga, la si scrive su più righe, andando a capo quando l'esponente della x diminuisce:

$$\begin{array}{lllllllll}
1^a \text{ riga}: & x^{20} \\
2^a \text{ riga}: & x^{19}y & x^{19} \\
3^a \text{ riga}: & x^{18}y^2 & x^{18}y & x^{18} \\
 & \vdots \\
12^a \text{ riga}: & x^9y^{11} & x^9y^{10} & x^9y^9 & x^9y^8 & \dots & x^9y & x^9 \\
13^a \text{ riga}: & x^8y^{12} & x^8y^{11} & x^8y^{10} & x^8y^9 & \dots & x^8y^2 & x^8y & x^8 \\
14^a \text{ riga}: & x^7y^{13} & x^7y^{12} & x^7y^{11} & \underbrace{x^7y^{10}} & \dots
\end{array}$$

Così facendo, infatti, si osserva subito che la 1^a riga contiene 1 monomio, la 2^a ne contiene 2, la 3^a ne contiene 3 e così via fino alla 13^a che ne contiene 13.
A questo punto basta osservare che il monomio x^7y^{10} si trova nella 4^a posizione della 14^a riga per poter dire che occupa la posizione:

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + 12 + 13) + 4 = 91 + 4 = 95.$$

Il fatto che la somma dei numeri interi da 1 a 13 fosse 91 era un calcolo sufficientemente corto da poter essere effettuato con la *forza bruta*, tuttavia, chi la conosceva, poteva usare la formula:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Chi volesse vederla spiegata (assieme a tante altre) può guardarsi la video-lezione 4 del corso di preparazione di base disponibile, grazie all'UMI, alla pagina **www.problemisvolti.it/CorsoBaseOlimpiadiMatematica.html**.

Soluzione del Quesito 11.

La risposta corretta è: $\frac{5}{7}$.
Ci viene chiesto di trovare il rapporto tra l'area grigio chiaro e quella grigio scuro della figura 4, sapendo che la base maggiore AB è il doppio della base minore CD e che P e Q sono i punti medi dei lati.

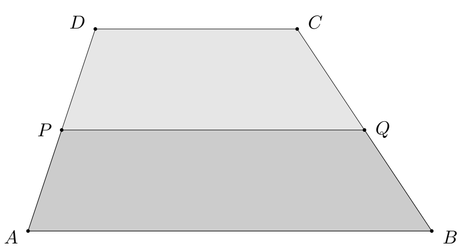

figura 4

Un possibile modo di procedere è il seguente: si congiunge il punto medio H di AB con C e si indica con K la sua intersezione con PQ, come si può vedere in figura 5:

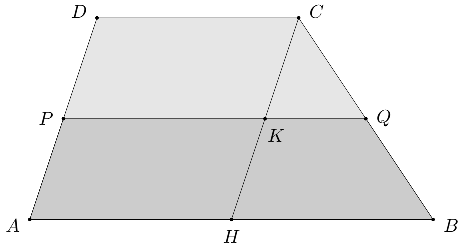

figura 5

È abbastanza semplice, a questo punto, verificare che PQ è parallelo alle basi ed uguale a $\frac{3}{2}CD$, infatti:

(3) $AHCD$ è un parallelogrammo (perché AK e CD sono paralleli e congruenti);

(4) PQ è parallelo alle basi (se non lo fosse si otterrebbe un assurdo col T. di Talete);

(5) K è punto medio di CH (per il T. di Talete);

(6) KQ è la metà di HB (per una conseguenza del T. di Talete);

(7) $PK = AH$ (perchè $AHKP$ è un parallelogrammo);

Infine è una conseguenza immediata del teorema di Talete anche il fatto che i due trapezi (grigio chiaro e grigio scuro) abbiano la stessa altezza h.
Se quindi abbiamo indicato con α l'area grigio chiaro, con β quella grigio scuro e con h la loro altezza (uguale), tenendo conto del fatto che $PQ = \frac{3}{2}CD$ e $AB = 2CD$, abbiamo:

$$\alpha = \frac{\left(\frac{3}{2}CD + CD\right) \cdot h}{2} = \frac{5}{4}CD \cdot h$$

e

$$\beta = \frac{\left(2CD + \frac{3}{2}CD\right) \cdot h}{2} = \frac{7}{4}CD \cdot h$$

da cui segue che $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{5}{7}$, che è quanto volevamo trovare.

Soluzione del Quesito 12.

La risposta corretta è: *solo* $p(x)$.
Infatti $q(x)$ e $h(x)$ sono fattorizzabili nel prodotto di polinomi a coefficienti interi perché:

$$\begin{aligned} q(x) &= x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = \\ &= (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h(x) &= x^4 + 64 = (x^4 + 16x^2 + 64) - 16x^2 = \\ &= (x^2+8)^2 - (4x)^2 = (x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8). \end{aligned}$$

Il fatto che $x^2 + x + 1$ non sia ulteriormente fattorizzabile, per uno studente del secondo anno, può essere dimostrato banalmente invocando il fatto che il suo discriminante è negativo.
Tuttavia tale dimostrazione non è ancora accessibile ad uno studente del primo anno. Vediamone dunque una dimostrazione alternativa.
Se per assurdo esistessero due binomi di 1^o grado, $ax + b$ e $cx + d$ tali che

$$(ax+b)(cx+d) = x^2 + x + 1. \tag{8}$$

svolgendo il prodotto al primo membro avremmo

$$acx^2 + (ad+bc)x + bd = x^2 + x + 1. \tag{9}$$

Ma è impossibile scegliere a, b, c e d interi, in modo che il polinomio al primo membro della (9) sia uguale a quello al secondo membro. Infatti, dal fatto che deve essere $ac = 1$ segue che $a = c = 1$ oppure $a = c = -1$. Analogamente, dal fatto che il termine noto deve essere 1 segue che $b = d = 1$ oppure $b = d = -1$. Di conseguenza $ad + bc$ potrà assumere solo valore 2 o -2, e quindi in nessun caso potrà mai aversi $ad + bc = 1$.
Ciò significa che non c'è modo di scegliere gli interi a, b, c e d in modo che sia verificata la (8), quindi $x^2 + x + 1$ non può mai essere scritto come prodotto di polinomi di primo grado a coefficienti interi, che è quanto volevamo dimostrare.

Soluzione del Quesito 13.

La risposta corretta è: 12.
Infatti, se si scompone n in fattori primi, si ottiene:

$$\begin{aligned} n &= 1122^2 - 121 = 1122^2 - 11^2 = (1122+11)(1122-11) = \\ &= 1133 \cdot 1111 = 11 \cdot 103 \cdot 11 \cdot 101 = 11^2 \cdot 101 \cdot 103. \end{aligned}$$

Ne segue che i divisori di n sono tutti e soli i numeri della forma:

$$11^a \cdot 101^b \cdot 103^c,$$

dove b e c possono assumere solo 2 valori diversi (0 e 1) mentre a può assumere 3 valori diversi (0, 1 e 2).
I casi possibili sono quindi $2 \cdot 2 \cdot 3$, cioè 12.

Soluzione del Quesito 14.

La risposta corretta è: 25.
Per prima cosa fattorizziamo $p(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^5 - 5x^3 + 4x = \\ &= x(x^4 - 5x^2 + 4) = \\ &= x(x^4 - x^2 - 4x^2 + 4) = \\ &= x\left(x^2(x^2-1) - 4(x^2-1)\right) = \\ &= x(x^2-1)(x^2-4) = \\ &= (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2). \end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$n = p(2014) = 2012 \cdot 2013 \cdot 2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \tag{10}$$

A questo punto la verifica diretta che, tra i numeri proposti, solo il 25 non divide n risulta abbastanza rapida.
Il fatto che 25 non divida n è ovvio, perchè l'unico fattore di (10) che può contenere potenze di 5 è 2015, che è divisibile per 5 ma non per 25.
Analogamente è ovvio che $45 = 5 \cdot 9$ e $55 = 5 \cdot 11$ dividano n visto che 2015 è divisibile per 9 e 2013 è divisibile per 11.
Per quanto riguarda la divisibilità per $65 = 5 \cdot 13$, per limitare i calcoli al minimo, sfruttiamo il fatto che in (10) abbiamo scritto n come prodotto di interi consecutivi: dopo aver provato a dividere 2012 per 13, trovando che il resto è 10, possiamo subito concludere quali sarebbero stati i resti prendendo come dividendo gli altri numeri, e in particolare che il resto è zero se il dividendo è 2015.
Infine, in modo del tutto analogo, troviamo che anche $35 = 5 \cdot 7$ divide n.
Quindi, tra i numeri proposti, l'unico che non divide n è 25.

Soluzione del Quesito 15.

La risposta corretta è: 486.
Nella nostra *tabella* 5×2 di appezzamenti quadrati, cominciamo a mettere le coltivazioni nella prima colonna. Siccome caselle confinanti devono avere coltivazioni diverse, possiamo farlo in 6 modi. Ad esempio nella figura seguente immaginiamo di aver piantato patate e carote:

P				
C				

figura 6

Ci chediamo ora: una volta decise le coltivazioni nella prima colonna, in quanti modi posso scegliere le coltivazioni della seconda? Nel nostro caso ad esempio, una volta che nella prima colonna ci sono **patate + carote**, le scelte possibili per la seconda colonna sono 3: **rape + patate**, **carote + patate** e **carote + rape**.

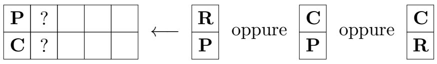

figura 7

Questo fatto però è vero comunque: se anzichè esserci **patate + carote** nella prima colonna ci fosse stata una qualsiasi delle altre combinazioni di coltivazioni, ci sarebbero comunque stati esattamente 3 modi di scegliere le coltivazioni nella seconda colonna.
Infatti basta rifare tutto allo stesso modo scambiando i nomi delle coltivazioni.
Inoltre il ragionamento che abbiamo fatto per passare dalla prima alla seconda colonna vale in generale ogni volta che si passa da una colonna alla successiva: una volta riempito di coltivazioni fino ad una certa colonna, le coltivazioni della successiva possono essere scelte in 3 modi.
Ricapitolando, abbiamo concluso che:

(11) *con la prima colonna possiamo partire in* 6 *modi diversi;*

(12) *ogni volta che decidiamo le coltivazioni di una nuova colonna, possiamo farlo in* 3 *modi diversi.*

Mettendo insieme (11) e (12), possiamo concludere che il numero complessivo di modi di scegliere le coltivazioni è:

$$6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

cioè 486.
Prima di concludere facciamo un'ultima osservazione sul tipo di procedimento usato.
La (12) è essenzialmente una **legge ricorsiva**: fornisce un legame tra la soluzione del problema al passo n e quella al passo $n+1$. Questo tipo di approccio è molto utile in combintoria e permette talvolta di banalizzare problemi apparentemente complessi. Se lo studente vuole approfondire l'argomento, può guardare la videolezione 3 del corso di preparazione di base disponibile, grazie all'UMI, alla pagina **www.problemisvolti.it/CorsoBaseOlimpiadiMatematica.html**.

Soluzione del Quesito 16.

La risposta corretta è: 1.
Osserviamo che se un numero X è un quadrato perfetto che termina per 5 deve necessariamente essere il quadrato di un numero che termina per 5, cioè deve essere del tipo:

$$X = (10n+5)^2.$$

Ma allora, sviluppando il quadrato, si ottiene:

$$X = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n+1) + 25. \tag{13}$$

Di conseguenza le ultime due cifre devono essere 25, mentre la cifra delle centinaia deve essere pari, visto che $n(n+1)$ è sempre pari, qualsiasi sia n.
Siccome tra i numeri proposti, l'unico che soddisfa tali condizioni è $b = 119025$, possiamo concludere che tutti gli altri non possono essere quadrati perfetti.
Rimane solo da verificare se b lo sia.
A questo punto, visto che non possiamo usare la calcolatrice, se ci ricordiamo come si fa ad estrarre la radice quadrata di un numero (cosa che abbiamo imparato alle scuole medie ma che probabilmente ci siamo dimenticati) estraiamo la radice di b e scopriamo che è 345, tonda tonda.
Se invece, come è molto probabile, non ce ne ricordiamo, possiamo risparmiare un po' di calcoli cercando quale deve essere n per ottenere 119025 dalla formula (13).
Cerchiamo quindi n in modo che:

$$100n(n+1) + 25 = 119025$$

cioè in modo che:

$$n(n+1) = 1190$$

A questo punto, qualche rapida considerazione su quanto grande può essere n ci fa subito capire che $30 < n < 40$. Inoltre, siccome $n(n+1)$ deve essere divisibile per 10, bisogna che 5 divida o n o $n+1$. Le uniche due possibilità sono quindi $n = 34$ e $n = 35$ e la verifica diretta mostra che quella giusta è $n = 34$.
Ciò significa che:

$$119025 = (10 \cdot 34 + 5)^2 = 345^2,$$

che è quanto volevamo mostrare.

Soluzione del Quesito 17.

La risposta corretta è 4.
Se conveniamo di indicare col termine **buona** una colorazione che abbia la proprietà richiesta dal problema, possiamo riformulare il problema nel modo seguente: *qual è la più grande scacchiera quadrata che ammette almeno una colorazione buona?*
Il fatto che una scacchiera 4×4 sia colorabile in modo buono si vede subito dal seguente esempio:

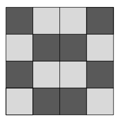

figura 8

Un po' più complesso, invece, è mostrare che se la scacchiera è 5×5, questo non è possibile: verificare a mano che *tutte* le 2^{25} colorazioni sono cattive è ovviamente troppo lungo.
Un modo più sistematico di affrontare il problema è quello di individuare qualche altra proprietà, che una colorazione debba necessariamente possedere se è **buona**: in tal modo basterà verificare che in una scacchiera col lato maggiore o uguale a 5 tale proprietà non può essere verificata.
Ad esempio mostriamo che le colorazioni buone hanno la seguente semplice proprietà:

(14) *se una scacchiera quadrata di lato* **dispari** *(e maggiore di 1) è colorata in modo* **buono** *allora le caselle di vertice diametralmente opposte non possono avere lo stesso colore*

Infatti, supponiamo per assurdo che esista una colorazione buona in cui le caselle di vertice diametralmente opposte abbiano lo stesso colore. La casella centrale (che di sicuro esiste perchè il lato della scacchiera è dispari) sarà colorata con uno dei due colori, ad esempio nero (se fosse bianca si ragionerebbe comunque in modo analogo). Ci ritroviamo dunque nella situazione descritta nella figura seguente:

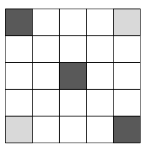

figura 9

Ma allora, prendendo la sotto-scacchiera evidenziata in fig. 10, si può concludere che devono essere bianche anche le altre due caselle che compaiono colorate in figura.

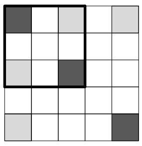

figura 10

Ragionando in modo analogo (vedi fig. 11) si riesce a dedurre che sono necessariamente bianche anche altre due caselle.

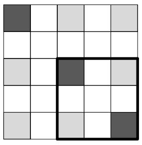

figura 11

Ma allora la colorazione non può essere buona, come si può notare dalla fig. 12.

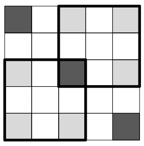

figura 12

Si noti che, anche se il ragionamento è stato illustrato con scacchiere di lato 5, per funzionare basta che il lato della scacchiera sia dispari e non minore di 3.
Di conseguenza l'unico modo di avere una colorazione buona su una scacchiera 5×5 è, a meno di rotazioni, il seguente:

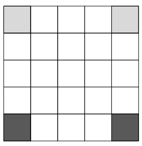

figura 13

Tuttavia anche così si arriva ad una contraddizione: la casella centrale non può essere né nera né bianca.
Se infatti fosse nera, la sotto-scacchiera 3×3 evidenziata nella figura seguente, in contrasto con la proprietà (14), avrebbe le caselle diametralmente opposte dello stesso colore:

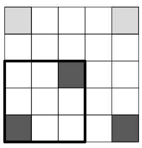

figura 14

Se invece fosse bianca (vedi fig. 15) la contraddizione si otterrebbe dalla sotto-scacchiera seguente:

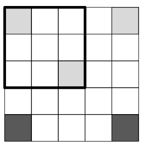

figura 15

In conclusione quindi, non può esistere una colorazione **buona** di una scacchiera 5×5. E quindi nemmeno di una più grande, visto che in tal caso conterrebbe una sotto-scacchiera 5×5.
Possiamo quindi concludere che la più grande scacchiera quadrata colorabile in modo **buono** è quella 4×4, che è quanto volevamo mostrare.

Soluzione del Quesito 18.

La risposta corretta è: $5x - 2$.

Per prima cosa, grazie al teorema di Ruffini, il fatto che $p(x)$ diviso $(x-1)$ dia come resto 3 equivale a dire che $p(1) = 3$.
Per lo stesso motivo, il fatto che $p(x)$ diviso $(x+1)$ dia come resto -7 equivale a dire che $p(-1) = -7$.
Ora, se indichiamo con $q(x)$ e $r(x)$ rispettivamente il quoziente e il resto della divisione tra $p(x)$ e $x^2 - 1$, abbiamo

$$p(x) = q(x) \cdot (x^2 - 1) + r(x),$$

da cui segue che

$$p(1) = q(1) \cdot (1^2 - 1) + r(1) = q(1) \cdot 0 + r(1) = r(1)$$

e che

$$p(-1) = q(-1) \cdot \big((-1)^2 - 1\big) + r(-1) = q(-1) \cdot 0 + r(-1) = r(-1),$$

cioè, in definitiva, che

$$r(1) = p(1) = 3 \qquad e \qquad r(-1) = p(-1) = -7. \tag{15}$$

Ricordiamo però che, essendo il divisore di secondo grado, il grado di $r(x)$ è al massimo 1, cioè abbiamo $r(x) = ax + b$, per opportuni a e b. Di conseguenza le condizioni (15) bastano a determinare univocamente $r(x)$, in quanto equivalgono a:

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ -a + b = -7, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = -2. \end{cases}$$

Ciò significa che $r(x) = 5x - 2$, che è quanto volevamo mostrare.