ZANICHELLI

Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore
Ministero della Pubblica Istruzione

Best Western

Gara Nazionale Classi Prime 2015

Problemi

Nella lista che segue la risposta corretta è sempre la **A**. *Ovviamente nelle* 36 *versioni del test che sono state fornite ai responsabili locali per la gara, sia le risposte che i problemi erano permutati in modo casuale.*

I problemi più semplici sono stati marcati col simbolo $\mathcal{F}$.

1. $\mathcal{F}$ Trovare α in modo che $2^\alpha = 4^{4^4}$.

A $\alpha = 512$ B $\alpha = 8$ C $\alpha = 128$ D $\alpha = 256$ E $\alpha = 2^{32}$ F $\alpha = 2^{16}$

2. $\mathcal{F}$ Il valore di x è il seguente:

$$x = \frac{A}{\frac{\frac{B}{C}}{D}}.$$

Allora:

A $x = A : (B : C : D)$ B $x = A : (B : (C : D))$ C $x = A : B : C : D$ D $x = A : B : (C : D)$ E $x = A : (B : C) : D$ F nessuna delle altre risposte è esatta

3. $\mathcal{F}$ Nel triangolo ABC, isoscele sulla base AB, l'altezza relativa ad AB è il doppio di quella relativa al lato CB. Se il perimetro del triangolo è 120cm quanto misura il lato CB?

A 48cm B 36cm C 24cm D 50cm E 45cm F 42cm

4. $\mathcal{F}$ Nella seguente frase (presa da una nota canzone dell'isola *Kenoncè*) una cifra non è leggibile ed è sostituita da un asterisco:

71∗ *gatti, in fila per* 17*, col resto di* 14

Sapendo che la frase è corretta dal punto di vista matematico, trovare la cifra mancante.

A 1 B 2 C 6 D 0 E 3 F i dati sono insufficienti a rispondere

5. $\mathcal{F}$ La professoressa *Facciocomemipare* di solito non dice agli alunni i voti delle interrogazioni, per cui Claudia conosce i voti di solo 2 delle 7 interrogazioni che ha fatto: sono un 7 e un 9. Inoltre sa che i voti delle interrogazioni sono sempre dei numeri interi e che la prof. mette il voto in pagella facendo la media aritmetica dei voti e arrotondando all'intero più vicino. Se alla fine in pagella prende 8, qual è il minimo valore che può avere la media dei 5 voti che non conosce?

A $7,4$ B $7,2$ C $7,5$ D $7,6$ E $7,8$ F nessuna delle altre risposte è esatta

6. $\mathcal{F}$ Un recipiente a forma di prisma retto con base quadrata è alto e stretto ed è pieno d'acqua fino al bordo. Se si travasa tutta l'acqua in un altro recipiente di forma identica, ma avente la base quadrata con il lato di misura tripla, nel nuovo recipiente il livello dell'acqua raggiunge la quota di 12mm. Quanto era alto il primo recipiente?

A 108mm B 36mm C 48mm D 324mm E 144mm F Non è determinabile se non si conoscono i lati delle basi

7. $\mathcal{F}$ Un esagono regolare ha l'area di 144cm². Qual è l'area del più piccolo triangolo equilatero che lo contiene?

A 216cm² B 192cm² C 288cm² D 180cm² E 240cm² F 256cm²

8. Nell'isola *Kenoncè* ci sono gravissimi problemi di edilizia scolastica: 2 scuole su 3 sono inutilizzabili. Per risolvere il problema, il primo ministro ha decretato:

(a) Ogni istituto comprimerà il suo orario in due soli giorni della settimana, in ciascuno dei quali si svolgeranno 15 ore di lezione.

(b) Ogni edificio scolastico sano verrà utilizzato da 3 istituti, ciascuno dei quali ne disporrà per due giorni la settimana.

In quanti modi diversi tre istituti possono suddividersi i giorni dal lunedì al sabato, in modo che i giorni occupati dallo stesso istituto non siano mai consecutivi?

A 30 B 89 C 10 D 12 E 24 F 18

9. In quanti modi diversi posso dipingere un cubo, colorando ciascuna faccia di bianco o di nero? (due colorazioni sono da considerare identiche, e quindi vanno contate una sola volta, se si possono ottenere l'una dall'altra ruotando il cubo nello spazio)

A 10 B 6 C 8 D 9 E 24 F 16

10. Dire quanto vale l'espressione: $1234567896 \cdot 1234567894 - 1234567899 \cdot 1234567891$.

A 15 B 0 C 10 D 6 E 5 F 31

11. Quando si scompone il polinomio $p(x) = x^6 + 3x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 24x^2 + 24x + 8$ come prodotto di polinomi a coefficienti interi di grado più basso, non ulteriormente scomponibili, si ottengono:

A 4 polinomi di 1° grado e uno di 2° grado B 6 polinomi di 1° grado C 3 polinomi di 1° grado e uno di 3° grado D 2 polinomi di 1° grado e 2 di 2° grado E 2 polinomi di 1° grado e uno di 4° grado F nessuna delle altre risposte è esatta

12. Quanti diversi numeri primi dividono il numero 1122221100? (si ricorda che 1 NON è un numero primo)

A 8 B 7 C meno di 7 D 9 E 10 F più di 10

13. Ad una scuola materna dell'isola *Kenoncè* sono iscritti 23 bimbi, e sono raggruppati tutti insieme nella stessa aula. Un giorno Luca, per passare il tempo, costruisce un grosso cubo utilizzando esattamente tutti i cubetti di legno che ci sono a scuola. Allora la maestra, per far fare lo stesso gioco anche ai suoi compagni, suddivide la totalità dei cubetti in parti uguali tra tutti i bimbi (Luca compreso) e ordina a ciascuno di loro di costruire un cubo usando esattamente tutti i cubetti che ha ricevuto.
Sapendo che i bimbi riescono a portare a termine il compito assegnato, dire quanti erano quel giorno gli assenti.

A 15 B 7 C 10 D 3 E 9 F i dati forniti sono insufficienti

14. Finita la Grande Crisi, nell'isola *Kenoncè* i turisti sono tornati a crescere. Rispetto all'anno precedente i turisti stranieri sono cresciuti del 5% mentre quelli nazionali dell'1%. Questo ha determinato una crescita del $2,5\%$ del numero totale di turisti.
Qual era l'anno prima la quota di turisti stranieri rispetto al totale dei turisti?

A $\frac{3}{8}$ B $\frac{1}{3}$ C $\frac{1}{2}$ D $\frac{2}{5}$ E $\frac{3}{7}$ F non determinabile in modo univoco dai soli dati forniti

15. In un liceo dell'isola *Kenoncè*, per scegliere chi interrogare dei suoi 21 alunni, la professoressa *Bocciotutti* fa in questo modo:

(a) Apre a caso un libro di 288 pagine (numerate da 1 a 288), sceglie a caso una delle due pagine su cui lo ha aperto e ne controlla il numero N.

(b) Se $N \leq 21$ prende dalla lista del registro lo studente contrassegnato col numero N, altrimenti sostituisce N con la somma delle sue cifre e ripete l'operazione (b).

Qual è il numero dello studente che ha la maggior probabilità di essere scelto?

A 10 B 9 C 11 D 8 E 12 F tutti gli studenti hanno la stessa probabilità di essere scelti

16. Trovare il più piccolo intero positivo m tale che esiste una lista di numeri interi positivi la cui somma sia m e il cui prodotto sia 720.

A $m = 19$ B $m = 16$ C $m = 17$ D $m = 18$ E $m = 20$ F $m = 21$

17. In un torneo all'italiana di tennis ogni giocatore gioca con ciascuno degli altri esattamente una volta e guadagna 1 punto se vince e 0 punti se perde. Ovviamente una partita a tennis non può finire pari. Sull'isola *Kenoncè* ogni anno si giocano 5 tornei ai quali partecipano rispettivamente: 8, 5, 17, 15 e 16 giocatori. Quanti di essi, al massimo, possono terminare con tutti i giocatori allo stesso punteggio?

A 3 B 1 C 2 D nessuno E 4 F tutti

18. Sulle 6 facce di un cubo distribuisco le cifre da 1 a 6. Su quelle di un altro cubo distribuisco le cifre 0, 1, 2, 7, 8 e 9. In questo modo, usando i due cubi per le cifre, posso rappresentare tutti i numeri da 1 a 32, ma non 33. Se invece di cubi si usassero degli ottaedri con le cifre distribuite in modo opportuno sulle facce, qual è il più grande numero N di 2 cifre tale che tutti i numeri interi da 1 a N sono rappresentabili usando per le cifre i due ottaedri?

A 76 B 43 C 54 D 65 E 97 F 80

Soluzioni

Soluzione del Quesito 1.

La risposta corretta è: 512.
Si ricordi che:

$$A^{B^C} \quad \text{significa} \quad A^{\left(B^C\right)},$$

cosicché si ottiene:

$$4^{4^4} = 4^{\left(4^4\right)} = 4^{256} = 2^{512}.$$

Ciò significa che $\alpha = 512$.

Soluzione del Quesito 2.

La risposta corretta è: $x = A : (B : C : D)$.
Infatti abbiamo:

$$x = \frac{A}{\frac{\frac{B}{C}}{D}} = A : \left(\frac{\frac{B}{C}}{D}\right) = A : \left(\left(\frac{B}{C}\right) : D\right) = A : ((B : C) : D) = A : (B : C : D),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo potuto eliminare le parentesi più interne grazie alla convenzione che, se ho più divisioni consecutive senza parentesi, queste vanno eseguite nell'ordine in cui si trovano.

Soluzione del Quesito 3.

La risposta corretta è: 48mm.
Dal fatto che l'altezza relativa ad AB è il doppio di quella relativa a CB segue che:

$$AB = \frac{1}{2}CB$$

e siccome $CB = AC$ si ha ovviamente anche

$$AB = \frac{1}{2}AC.$$

Ne segue che

$$AB = \frac{1}{5} \text{ del perimetro} = \frac{1}{5} \cdot 120\text{mm} = 24\text{mm}$$

e quindi

$$CB = 2 \cdot AB = 48\text{mm}.$$

Soluzione del Quesito 4.

La risposta corretta è: 1.
I multipli di 17 più vicini al numero $71*$, qualsiasi esso sia, sono:

$$\begin{aligned} 680 &= 17 \cdot 40 \\ 697 &= 17 \cdot 41 \\ 714 &= 17 \cdot 42 \\ 731 &= 17 \cdot 43. \end{aligned}$$

Aggiungendo 14 a entrambi i membri in ciascuna di queste uguaglianze si ottiene:

$$\begin{aligned} 694 &= 17 \cdot 40 + 14 \\ 711 &= 17 \cdot 41 + 14 \\ 728 &= 17 \cdot 42 + 14 \\ 745 &= 17 \cdot 43 + 14. \end{aligned}$$

Quindi l'unico numero della forma $71*$ che diviso per 17 da resto 14 è 711.
Quindi la cifra cancellata è necessariamente un 1.

Soluzione del Quesito 5.

La risposta corretta è: $7,4$.
Si ragiona meglio usando non la media, ma la somma dei 7 voti, che indichiamo per comodità con S.
Ovviamente, $S = 56$ corrisponde alla media dell'otto, mentre $S = 49$ corrisponde alla media del sette.
Il valore a metà strada, cioè $S = 52,5$ corrisponderebbe ad una media del $7,5$, ma non c'e' modo di ottenerlo, visto che i voti delle interrogazioni sono tutti interi e quindi la somma S deve essere intera.
Quindi, se voglio ottenere una media maggiore di $7,5$ (in modo che poi, arrotondando, mi venga dato 8) il minimo valore intero che può avere la somma dei miei voti è 53.
Ma siccome conosco già 2 dei 7 voti (un 7 e un 9) posso concludere che la somma dei rimanenti 5 voti deve essere al minimo $53 - 9 - 7$, cioè 37, e quindi la loro media è al minimo $7,4$.

Soluzione del Quesito 6.

La risposta corretta è: 108mm.
Il recipiente in cui l'acqua viene versata ha la base col lato che è il triplo di quello più piccolo e quindi l'area della sua base è 9 volte più grande.
Di conseguenza il livello raggiunto dall'acqua versata deve essere $\frac{1}{9}$ del livello che la stessa quantità di acqua raggiungeva nel recipiente di partenza. Quindi, se il livello nel recipiente di arrivo è di 12 millimetri, in quello di partenza doveva essere 108 millimetri.
Poiché sappiamo che era pieno fino al bordo, 108 millimetri è anche il valore della sua altezza.

Soluzione del Quesito 7.

La risposta corretta è: 216cm^2.
È molto facile (vedi figura 1) trovare un triangolo equilatero che contenga l'esagono ed avente area uguale ai $\frac{3}{2}$ dell'area dell'esagono.

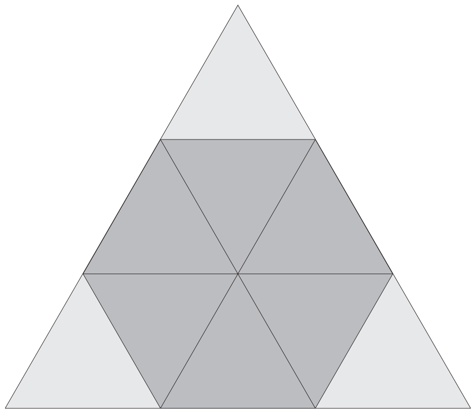

figura 1

Per convincersi che tale triangolo è il più piccolo possibile, basta osservare che ogni altro triangolo equilatero che contenga l'esagono assegnato, dovrà contenere anche il cerchio a cui esso è circoscritto, e quindi il suo apotema non potrà essere più piccolo di quello dell'esagono.
Quindi la minima area che un tale triangolo equilatero può avere è $\frac{3}{2}$ di 144cm^2, cioè 216cm^2.

Soluzione del Quesito 8.

La risposta corretta è: 30.
Per formalizzare meglio il problema, indichiamo i tre istituti con le lettere **A**, **B** e **C**, rispettivamente e immaginiamo di scrivere una parola di 6 lettere usando la regola seguente: nella posizione $k-$esima della parola scriviamo la lettera dell'istituto che occupa l'edificio nel giorno $k-$esimo.
Ad esempio, se l'istituto **A** si prende il lunedì e il sabato, l'istituto **B** si prende il martedì e il giovedì e infine l'istituto **C** si prende il mercoledì e il venerdì, la parola che rappresenta la distribuzione dei giorni sarà:

ABCBCA

Si tratta quindi di contare quanti sono gli anagrammi della parola **AABBCC** in cui lettere vicine sono sempre diverse. Per brevità indicheremo tali anagrammi col termine di *"anagrammi buoni"*.
Un modo semplice di procedere è quello di contarli *"a mano"*, ma prestando bene attenzione a come distinguere i casi.
Per cominciare, contiamo quanti sono gli anagrammi buoni che iniziano con **AB**, cioè del tipo:

$$\mathbf{AB} * * * *$$

I casi che si possono presentare sono ovviamente 2:

$$\mathbf{ABA} * * * \qquad \text{oppure} \qquad \mathbf{ABC} * * *$$

Nel primo caso, le rimanenti 3 lettere possono essere piazzate in un solo modo:

ABACBC.

Nel secondo caso invece i modi sono 4:

ABCABC **ABCACB** **ABCBAC** **ABCBCA**

Gli anagrammi buoni che iniziano per **AB** sono perciò 5.
Ovviamente, procedendo nello stesso modo, si trova che sono 5 anche gli anagrammi buoni che iniziano, invece che con **AB**, con una qualsiasi altra coppia di lettere diverse scelte tra **A**, **B** e **C**.

Siccome le due lettere iniziali si possono scegliere in 6 modi diversi, gli anagrammi da contare sono complessivamente $6 \cdot 5$, cioè 30, che è quello che volevamo dimostrare.

Soluzione del Quesito 9.

La risposta corretta è: 10.
In problemi come questo, dove il numero di situazioni da contare è piccolo, il modo più semplice è di contarle *"a mano"*, facendo però bene attenzione a come si distinguono i casi.
Decidiamo di distinguere i casi a seconda di quante sono le facce colorate di bianco.
Se le facce colorate di bianco sono 0, c'è ovviamente una sola colorazione.
Lo stesso dicasi se la faccia colorata di bianco è una sola: due qualsiasi colorazioni con una sola faccia bianca possono ovviamente essere ruotate in modo da essere identiche (ad esempio si può sempre fare in modo che la faccia bianca sia quella in alto).
Se invece le facce bianche sono 2 vi sono due colorazioni distinte: quella in cui le due facce bianche hanno un lato in comune e quelle in cui, invece, sono facce opposte del cubo: ogni altra colorazione con due facce bianche può essere ruotata in modo da coincidere con una di queste due.
Se infine le facce bianche sono 3 possono capitare due casi: o due di esse sono un opposta dell'altra e quindi la rimanente terza ha un lato in comune con entrambe le prime due, o nessuna delle tre è opposta di una delle altre due, nel qual caso è forzato che siano tre facce che hanno un vertice in comune. Anche qui due colorazioni che ricadano nello stesso caso sono ottenibili l'una dall'altra per rotazione e quindi vanno contate una sola volta.
Se poi le facce bianche sono 4, 5 o 6, significa che le facce nere sono 2, 1 o 0, quindi le sappiamo contare invertendo i colori delle facce.
Possiamo quindi riassumere la casistica che abbiamo appena fatto.
Se le facce bianche sono 0 (oppure 1, 5 o 6), vi è una sola colorazione.
Se invece le facce bianche sono 2 (oppure 3 o 4) le colorazioni sono 2.
In tutto quindi le colorazioni sono $1+1+1+1+2+2+2$, cioè 10.

Soluzione del Quesito 10.

La risposta corretta è: 15.
Infatti, se indichiamo con n il numero 1234567895, l'espressione da calcolare si può scrivere come $(n+1)(n-1)-(n+4)(n-4)$, quindi otteniamo:

$$(n+1)(n-1)-(n+4)(n-4) = n^2-1-n^2+16 = 15.$$

Soluzione del Quesito 11.

La risposta corretta è: 4 polinomi di 1° grado e uno di 2° grado.
Infatti:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^6+3x^5+3x^4+9x^3+24x^2+24x+8 = \\ &= x^6+3x^5+3x^4+x^3+8x^3+24x^2+24x+8 = \\ &= x^3(x^3+3x^2+3x+1)+8(x^3+3x^2+3x+1) = \\ &= (x^3+8)(x^3+3x^2+3x+1) = \\ &= (x+2)(x^2-2x+4)(x+1)^3 \end{aligned}$$

A questo punto, per completare la soluzione, bisogna motivare in qualche modo il fatto che x^2-2x+4 non sia ulteriormente scomponibile.
Riportamo qui di seguito una motivazione accessibile ad un ragazzo di classe prima.
Se per assurdo x^2-2x+4 fosse scomponibile nel prodotto di due polinomi di primo grado a coefficienti interi si avrebbe:

$$x^2-2x+4 = (ax+b)(cx+d)$$

Quindi l'equazione

$$x^2-2x+4=0 \tag{1}$$

potrebbe riscriversi:

$$(ax+b)(cx+d)=0$$

e quindi avrebbe due soluzioni $x=-\frac{b}{a}$ e $x=-\frac{d}{c}$.
Ma questo non può accadere, perché l'equazione (1) può essere riscritta come:

$$(x-1)^2+3=0$$

e quindi non c'è alcun valore reale di x che la soddisfi, visto che il primo membro è sempre strettamante positivo.
Ciò significa che supporre che x^2-2x+4 sia scomponibile porta ad una contraddizione.

Soluzione del Quesito 12.

La risposta corretta è: 8.

Per rispondere alla domanda è sufficiente scomporre in fattori primi (con qualche trucco!) il numero assegnato:

$$\begin{aligned} 1122221100 &= 100 \cdot 11222211 = \\ &= 2^2 \cdot 5^2 \cdot (11111100+111111) = \\ &= 2^2 \cdot 5^2 \cdot 111111 \cdot 101 = \\ &= 2^2 \cdot 5^2 \cdot 111 \cdot 1001 \cdot 101 = \\ &= 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 101 = \\ &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101. \end{aligned}$$

Soluzione del Quesito 13.

La risposta corretta è: 15.
Indichiamo con N il numero di bimbi presenti.
Poiché ciascun bimbo ha la stessa quantità di cubetti e con tale quantità riesce a costruire un cubo, tale quantità deve essere un cubo perfetto e quindi possiamo indicarla come A^3, con A intero strettamente positivo.
Quindi il numero complessivo dei cubetti che ci sono a scuola è $N \cdot A^3$.
Ma sappiamo che usando tutti i cubetti Luca aveva costruito un cubo, quindi anche $N \cdot A^3$ deve essere un cubo perfetto.
Di conseguenza il numero N di bimbi presenti deve essere un cubo perfetto.
Siccome però a scuola ci sono almeno 2 bimbi (almeno uno oltre a Luca) ma non più di 23, l'unico valore possibile per N è 8, per cui i bimbi assenti devono essere 15.

Soluzione del Quesito 14.

La risposta corretta è: $\frac{3}{8}$.
Indichiamo la nostra incognita con x, ovvero x è un numero compreso tra 0 e 1 che indica quale era lo scorso anno la frazione di turisti stranieri rispetto al totale di turisti.
Di conseguenza la frazione di turisti nazionali era $1-x$.
Sappiamo che incrementando x del 5% e $1-x$ dell'1% si è ottenuto un incremento del 2,5%.
Questo fatto si traduce in equazione nel modo seguente:

$$\frac{105}{100}x + \frac{101}{100}(1-x) = \frac{102,5}{100}$$

che, moltiplicando ambo i membri per 200 diventa:

$$210x + 202(1-x) = 205$$

da cui segue

$$x = \frac{3}{8}$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Soluzione del Quesito 15.

La risposta corretta è: 10.
Per capire bene come procedere conviene analizzare cosa succede con i numeri di pagina da 100 a 199.
Di essi, solo il 100 porta ad interrogare lo studente n.1.
Invece allo studente n.2 corrispondono due numeri di pagina: 101 e 110.
Allo studente n.3 corrispondono 3 numeri: 102, 111 e 120.
Allo studente n.4 corrispondono 4 numeri: 103, 112, 121 e 130.
Proseguendo allo stesso modo si arriva fino allo studente n.10, al quale corrispondono 10 numeri di pagina.
A questo punto però la situazione si inverte e i numeri di pagina che corrispondono agli studenti successivi allo studente n.10 sono sempre 1 in meno del precedente, fino ad arrivare allo studente n.19, al quale corrisponde solo il numero di pagina 199.
Quindi, se si considerano i numeri di pagina da 100 a 199 lo studente più gettonato è il n.10, che ha 10 possibilità, seguito a parimerito dagli studenti n.9 e n.11, che hanno 9 possibilità, e poi via via tutti gli altri.
Procedendo allo stesso modo, se considerassimo i numeri di pagina da 200 a 299, otterremmo che lo studente più gettonato è il n.11, seguito ad un punto dagli studenti n.10 e n.12, tuttavia, siccome le pagine dalla 289 alla 299 mancano, quello che si ottiene è che gli studenti più gettonati sono il n.10 ed il n.11 a parimerito con 9 possibilità.
Rimangono a questo punto da considerare solo i numeri di pagina da 1 a 99. Facendo attenzione al fatto che fino al 21 non bisogna sommarne le cifre ma tenerli come stanno, si trova stavolta che gli studenti più gettonati sono il n.9, il n.10 e il n.11, tutti e tre a parimerito con 9 possibilità.
Mettendo insieme tutte le informazioni trovate possiamo concludere che lo studente che ha maggiori possibilità di essere chiamato è il n.10, che è l'unico ad avere ben 28 numeri di pagina che portano a far chiamare lui.

Soluzione del Quesito 16.

La risposta corretta è: 19.
Per cominciare osserviamo che se una lista di numeri minimizza la somma non può contenere il numero 1: togliendolo, infatti, il prodotto non cambierebbe, ma la somma diminuirebbe strettamente.
Quindi la lista di numeri che minimizza la somma contiene solo numeri interi e maggiori o uguali a 2.
A questo punto, scomponendo in fattori primi 720, si ottiene:

$$720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Se quindi prendo la lista di numeri:

$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 5$$

avrò che il prodotto dei numeri della lista è 720, mentre la somma è 19.
Visto che i numeri di questa nostra lista sono tutti primi, ogni eventuale altra lista di interi positivi il cui prodotto sia 720 dovrà ottenersi facendo (eventualmente più di una volta) l'operazione di togliere dalla lista due o più numeri sostituendoli con il loro prodotto.
Ad esempio potrei scrivere 10 al posto di 2 e 5, e mettere 8 al posto di tre numeri 2, ottenendo la lista:

$$8,\ 10,\ 3,\ 3.$$

Notiamo che ogni volta che si sostituisce una coppia di numeri interi non minori di 2 col loro prodotto, il prodotto complessivo ovviamente non cambia, mentre la somma rimane uguale se i due numeri sono entrambi uguali a 2 e altrimenti aumenta.
Di conseguenza la somma che si ottiene con la lista iniziale, cioè 19, è il minimo valore possibile.

Soluzione del Quesito 17.

La risposta corretta è: 3.
Infatti i tornei all'italiana che possono terminare con tutti i concorrenti in parità sono tutti e soli quelli che hanno un numero dispari di partecipanti.
Per verificarlo dobbiamo dimostrare due cose: che se n è pari non è possibile che tutti terminino in parità mentre invece se n è dispari ciò è possibile.
Osserviamo che, se indichiamo con n il numero di partecipanti al torneo, visto che ciascuno gioca con tutti gli altri, il numero totale di partite disputate è $\frac{n(n-1)}{2}$.
Visto che ogni partita vale 1 punto, a fine torneo la somma dei punti di tutti i partecipanti è ovviamente uguale al numero di partite. Di conseguenza, se tutti i partecipanti hanno lo stesso punteggio, tale punteggio è necessariamente $\frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}$, cioè $\frac{n-1}{2}$.
Ma tale valore non è intero se n non è dispari.
Ciò significa che se n non è dispari la situazione non può verificarsi.
Rimane ora da verificare che quando invece n è dispari c'è effettivamente una configurazione di vittorie/sconfitte che fa terminare tutti allo stesso punteggio.
Possiamo esibirne una nel modo seguente, dove, essendo n dispari, poniamo $n = 2k + 1$ per qualche intero k.
Immaginiamo di prendere un poligono regolare di $2k + 1$ vertici e su ciascun vertice poniamo un giocatore. Immaginiamo poi che ciascuno vinca con i k giocatori che, in senso antiorario, lo precedono mentre perda con i k che lo seguono. In una situazione del genere ogni giocatore vince esattamente k partite e quindi a fine torneo ha esattamente k punti.
Questa costruzione può ovviamente essere fatta tutte le volte che $n = 2k + 1$, cioè tutte le volte che n è dispari.
Possiamo quindi concludere che il fatto che il numero di partecipanti sia dispari è condizione necessaria e sufficiente perché esista una configurazione di sconfitte/vittorie che fa terminare il torneo con tutti i partecipanti allo stesso punteggio.

Soluzione del Quesito 18.

La risposta corretta è: 76.
Per poter ottenere tutti i numeri da 1 a 76 è sufficiente mettere le cifre da 1 a 8 sulle facce di uno dei due ottaedri, e le cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0 e 9 sulle facce dell'altro.
Infatti in tal modo è possibile soddisfare le condizioni elencate qui di seguito.

(a) Ogni cifra compare almeno un volta e quindi tutti i numeri da 1 a 9 possono essere rappresentati.

(b) Ogni cifra da 1 a 6 compare su entrambi i gli ottaedri mentre le cifre 0, 7, 8 e 9 compaiono una volta sola, di conseguenza, comunque si scelga una cifra da 0 a 9 per le unità, è sempre possibile scegliere sull'altro ottaedro una qualsiasi cifra da 1 a 6 da usare per le decine. Questo permette di rappresentare tutti i numeri da 10 a 69.

(c) L'ottaedro che non contiene la cifra 7 contiene tutte le cifre da 0 a 6 e quindi tutti i numeri da 70 a 76 sono rappresentabili.

Ora che abbiamo dimostrato che esiste una distribuzione delle cifre che permette di ottenere tutti i numeri da 1 a 76, mostriamo che non ne può esistere alcuna che permetta di rappresentare tutti i numeri da 1 a 77.
Infatti, se per assurdo fosse così, tutte le cifre da 1 a 7 dovrebbero essere presenti su entrambi gli ottaedri, di conseguenza rimarrebbero solo 2 facce libere (una per ottaedro) per sistemare le altre 3 cifre (0, 8 e 9). Quindi non sarebbe possibile disporre di tutte le 10 cifre, rendendo impossibile la richiesta di rappresentare tutti i numeri da 1 a 77.
Quindi il più grande numero intero N tale che tutti i numeri da 1 a N sono rappresentabili nel modo richiesto, è 76.