Unione Matematica Italiana
Scuola Normale Superiore
MIUR

Gara Nazionale Classi Prime 2016

Problemi

Nella lista che segue la risposta corretta è sempre la **A**. *Ovviamente nelle 36 versioni del test che sono state fornite ai responsabili locali per la gara, sia le risposte che i problemi erano permutati in modo casuale.*

I problemi non sono in ordine di difficoltà: i più semplici sono stati marcati col simbolo $\mathcal{F}$.

1. Sappiamo che un numero intero positivo n ha 6 divisori (contando tra i divisori anche 1 ed n). Quanti divisori può avere, al massimo, il suo quadrato?

A 15   B 11   C 36   D 7   E 35   F 12

2. Siano dati i numeri $a = 1234321$, $b = 1002001$ e $c = 2^{49} - 2^{48}$. Quali di essi sono dei quadrati perfetti?

A tutti   B solo a e b C solo a e c D solo b e c E solo b F nessuno

3. Dati due numeri interi positivi m e n, sappiamo che $MCD(m,n) = 6$ e che $mcm(m,n) = 3150$. Quanto vale il prodotto $m \cdot n$?

A 18900   B 9450   C 6300   D 12600   E i dati forniti sono incompatibili perché non esistono due numeri n ed m soddisfacienti alle condizioni richieste   F i dati forniti sono insufficienti a rispondere

4. Sull'isola *Kenoncè* i bancomat distribuiscono denaro utilizzando banconote da 5, 20 e 35 sesterzi. Claudia vuole ritirare del denaro in modo da essere sicura di ricevere almeno una banconota da 5 sesterzi. Qual è la massima quantità di denaro che può ritirare?

A 85 sesterzi   B 95 sesterzi   C 195 sesterzi   D 110 sesterzi   E 65 sesterzi   F non c'è un massimo, perché esistono quantità multiple di 5 sesterzi arbitrariamente grandi, non esprimibili usando solo banconote da 20 e da 35 sesterzi

5. Claudia e Luca si sfidano al gioco **Mordi La Striscia**: si parte da una striscia di liquirizia di lunghezza intera (espressa in centimetri) e, a turno, ciascun giocatore ne stacca con un morso un pezzo di lunghezza intera positiva (sempre espressa in centimetri), ma facendo in modo che, ad ogni turno, la liquirizia staccata dal morso non sia mai di più di quella che rimane. Alla fine vince chi, dopo il morso, lascia una striscia di un solo centimetro.
Ad un certo punto la striscia di liquirizia è lunga 27cm e tocca a Claudia mordere. Se vuole essere sicura di vincere, quanti centimetri di liquirizia deve staccare col suo morso?

A 12   B 13   C 11   D 10   E 9   F vincerà Luca qualsiasi cosa faccia Claudia

6. $\mathcal{F}$ Luca ha scritto il PIN del suo bancomat su un foglio di carta, ma la terza e l'ultima cifra sono state cancellate. Ecco come si presenta il PIN: $\mathbf{16} \sqcup \mathbf{6} \sqcup$. Luca però ricorda che era un numero divisibile per 15 e questo gli permette di ridurre sensibilmente il numero di casi possibili tra cui provare. Quanti sono questi casi?

A 7   B 6   C 8   D 9   E 10   F 11

7. $\mathcal{F}$ Quanti sono i numeri interi n, tali che $700 \leq n \leq 800$, che non hanno fattori in comune con 707?

A 86   B 82   C 93   D 81   E 91   F 77

8. $\mathcal{F}$ La maestra *Sotuttoio* è fissata col lavoro di gruppo e con i cartelloni. Il gruppo composto da Luca, Massimo, Davide e Claudia deve preparare un cartellone con 10 disegni: potranno ripartirsi il lavoro come vogliono, a condizione che a ciascuno dei 10 disegni lavori una persona sola. Il voto finale conseguito dal gruppo sarà il prodotto del numero di disegni fatti da ciascun bimbo. Ad esempio, se Luca fa 7 disegni e ciascuno degli altri bimbi ne fa uno solo, il voto finale sarà $7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$, cioè 7.
I bimbi notano subito che si possono prendere anche voti più alti di 10.
Qual è il voto più alto che si può prendere?

A 36   B 24   C 54   D 27   E 15   F 20

9. $\mathcal{F}$ Dato un ottagono regolare si consideri l'insieme $\mathcal{U}$ costituito dai suoi 8 vertici e dal suo centro. Quanti sono i triangoli rettangoli aventi per vertici 3 punti di $\mathcal{U}$?

A 32   B 28   C 56   D 16   E 36   F 72

10. Nel triangolo ABC si ha $AB = 60$cm e $AC = 50$cm. Prendiamo P sul lato AB e Q sul lato AC in modo che $AP = AQ = 10$cm. Se l'area del quadrilatero $BCQP$ è 696cm^2, quanto vale, in cm^2 l'area del triangolo APQ?

A 24   B 32   C 20   D 18   E 36   F non non è determinabile dai soli dati forniti

11. Siano $n = 11.112.222$ e $m = 11.118.888$. Quanti numeri interi positivi dividono esattamente sia m che n?

A 16   B 8   C 2   D 4   E 24   F 6

12. La professoressa *Quandomigira* deve ancora portare i risultati del compito in classe del mese scorso. Pressata da uno studente, gli risponde: - *Non ricordo il tuo voto. Posso solo dirti che i voti soddisfano la seguente proprietà: comunque si scelga un ragazzo, è sempre possibile trovare almeno una ragazza che ha preso un voto strettamente maggiore del suo.*
Dire quali delle seguenti affermazioni si possono dedurre dalle parole dalla professoressa:

(**a**) comunque scelta una ragazza, c'è almeno un ragazzo che ha preso un voto più basso di lei;

(**b**) la media dei voti delle ragazze è più alta della media dei voti dei ragazzi;

(**c**) il voto più alto preso da una ragazza è più alto del voto più alto preso da un ragazzo.

A solo (**c**)   B solo (**b**)   C solo (**a**)   D tutte   E nessuna   F solo (**a**) e (**c**)

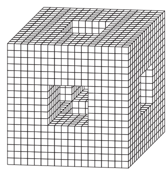
13. $\mathcal{F}$ Quante cifre ha il minimo comune multiplo tra 2019000 e 2021000?

A 10   B 7   C 8   D 9   E 11   F più di 11

14. Su un foglio è scritta una lista di 6 monomi: il primo è xy^2 mentre l'ultimo è x^8y^6. Inoltre sappiamo che ciascun monomio, dal terzo in poi, è il prodotto dei due monomi che lo precedono. Qual è il quarto monomio?

A x^3y^2 B x^2y^3 C x^2y^4 D x^4y^2 E x^3y F non determinabile dai soli dati forniti

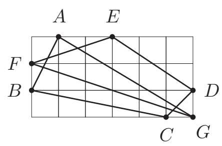
15. $\mathcal{F}$ Ad un cubo con lato di 18cm sono stati praticati, al centro delle facce, 3 fori quadrati con lato di 6cm che lo trapassano da parte a parte, come in figura:



Qual è, espresso in cm^3, il volume del solido ottenuto?

A 4320   B 3888   C 1944   D 5616   E 5184   F 3600

16. Il rettangolo in figura è composto da 18 quadratini. Sui suoi lati (vedi figura) sono stati presi i punti A, B, C, D, E, F e G:



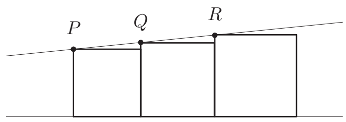
Quanto vale la somma degli angoli convessi $\widehat{GAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDE} + \widehat{DEF} + \widehat{EFG} + \widehat{FGA}$?

A 540°   B 630°   C 720°   D 450°   E 360°   F 900°

17. Del polinomio di terzo grado $p(x)$ sappiamo che i suoi coefficienti sono tutti interi, che $p(7) = p(13) = 0$ e che $p(0)$ è un numero positivo di 2 cifre. Quanto vale $p(0)$?

A 91   B 20   C 21   D 19   E 92   F non è determinabile dai soli dati forniti

18. Tre quadrati, disegnati come in figura, hanno i vertici P, Q ed R allineati. Sappiamo inoltre che il lato del più piccolo misura 1 metro e quello del più grande misura 120cm.



Quanto vale, espressa in cm^2 l'area di quello di dimensioni intermedie?

A 12000   B 14400   C 12200   D 11000   E 12100   F 12400

Soluzioni

Qui di seguito trovate le soluzioni in forma scritta. Le soluzioni in video verranno pubblicate un po' alla volta sul mio canale YouTube:

`problemisvolti.it.`

Emanuele Callegari

Soluzione del Quesito 1.

La risposta corretta è: 15.
Immaginiamo di aver fattorizzato il numero n.
Se nella sua fattorizzazione compare un solo numero primo, cioè se abbiamo

$$n = p^\alpha \tag{1}$$

con p primo, allora i divisori di n sono tutti e soli i numeri del tipo

$$p^k \qquad \text{con } k = 0, 1, \ldots, \alpha.$$

Di conseguenza, affinché i divisori di n siano 6, deve essere $\alpha = 5$, cioè $n = p^5$.
Ne segue che $n^2 = p^{10}$ e quindi i divisori di n^2 sono 11.
Se invece nella fattorizzazione di n compaiono 2 numeri primi, cioè se

$$n = p^\alpha \cdot q^\beta, \tag{2}$$

con p e q primi, allora i suoi divisori sono tutti e soli i numeri del tipo

$$p^k \cdot q^h, \qquad \text{con } k = 0, 1, \ldots, \alpha \;\text{ e }\; h = 0, 1, \ldots, \beta.$$

Quindi, in questo caso, n ha $(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1)$ divisori.
Di conseguenza, affinché i divisori siano 6, dovremo avere $(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) = 6$, cioè:

$$n = p \cdot q^2 \qquad \text{oppure} \qquad n = p^2 \cdot q.$$

Ma allora

$$n^2 = p^2 \cdot q^4 \qquad \text{oppure} \qquad n^2 = p^4 \cdot q^2$$

e quindi, in entrambi i casi, i divisori di n^2 sono 15.
Infine osserviamo che, oltre a (1) e (2), non ci sono altri casi possibili .
Infatti, se nella fattorizzazione di n comparissero più di 2 numeri primi, cioè se fosse

$$n = p^\alpha \cdot q^\beta \cdot s^\gamma \cdot \ldots$$

ragionando in modo analogo a prima si otterrebbe che i divisori di n sono

$$(\alpha + 1) \cdot (\beta + 1) \cdot (\gamma + 1) \cdot \ldots$$

e quindi il loro numero sarebbe maggiore di $2 \cdot 2 \cdot 2$, mentre invece devono essere solo 6.
Possiamo quindi concludere che, se i divisori di n sono 6, allora si possono presentare solo i casi (1) e (2) e quindi n^2 ha al massimo 15 divisori.

Soluzione del Quesito 2.

La risposta corretta è: tutti.
Infatti abbiamo:

$$c = 2^{49} - 2^{48} = 2^{48} \cdot (2 - 1) = 2^{48} = \left(2^{24}\right)^2$$

$$\begin{aligned} b &= 1002001 = (1000000 + 2000 + 1) = \\ &= 1000^2 + 2 \cdot 1000 + 1 = (1000 + 1)^2 = 1001^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 1234321 = \\ &= 1111000 + 111100 + 11110 + 1111 = \\ &= 1111 \cdot 1000 + 1111 \cdot 100 + 1111 \cdot 10 + 1111 = \\ &= 1111 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = \\ &= 1111 \cdot 1111 = 1111^2 \end{aligned}$$

.

Soluzione del Quesito 3.

La risposta corretta è: 18900.
Infatti, una volta verificato che 6 divide 3150, siamo sicuri che esiste almeno una coppia di numeri m e n tali che $MCD(m, n) = 6$ e $mcm(m, n) = 3150$: basta infatti prendere proprio $m = 6$ e $n = 3150$.
Per tale coppia di numeri, che però non è l'unica possibile, si ha:

$$m \cdot n = MCD(m, n) \cdot mcm(m, n) = 6 \cdot 3150 = 18900. \tag{3}$$

Vogliamo però mostrare che la formula:

$$m \cdot n = MCD(m, n) \cdot mcm(m, n)$$

ha validità generale, in modo da poter concludere che la (3) vale sempre.
Infatti, comunque si prenda un numero primo p, se nella fattorizzazione di m compare p^α e in quella di n compare p^β, allora p^α e p^β devono comparire uno in $MCD(m, n)$ (quello con esponente minore) e l'altro in $mcm(m, n)$ (quello con esponente maggiore).
Di conseguenza sia nella fattorizzazione di $MCD(m, n) \cdot mcm(m, n)$ che in quella di $m \cdot n$, p compare con esponente $\alpha + \beta$.
Visto che ciò vale per ogni primo p, possiamo dire che $MCD(m, n) \cdot mcm(m, n)$ e $m \cdot n$ hanno la stessa fattorizzazione e quindi sono uguali, che è quanto ci serviva.

Soluzione del Quesito 4.

La risposta corretta è: 85 sesterzi.
Si tratta di stabilire qual è la quantità di denaro più grande che non è esprimibile usando solo banconote da 20 e 35 sesterzi.
Osserviamo che le quantità di 90, 95, 100 e 105 sesterzi si possono esprimere nel modo seguente:

$$\begin{aligned} 90 &= 20 + 35 + 35 \\ 95 &= 20 + 20 + 20 + 35 \\ 100 &= 20 + 20 + 20 + 20 + 20 \\ 105 &= 35 + 35 + 35 \end{aligned} \tag{4}$$

Di conseguenza anche ogni multiplo di 5 sesterzi maggiore di 105 può essere espresso senza usare le banconote da 5, perché lo si può ottenere aggiungendo un opportuno multiplo di 20 ad uno dei 4 numeri elencati in (4).
Invece la quantità di 85 sesterzi non si può ottenere in alcun modo senza usare le banconote da 5 sesterzi.
Infatti, visto che termina per 5, se non usiamo banconote da 5 sesterzi dobbiamo usare un numero dispari di banconote da 35 sesterzi.
Ma 3 sono troppe, perché

$$3 \cdot 35 = 105 > 85.$$

Anche una sola però non va bene, perchè la restante quantità di 50 sesterzi non può essere ottenuta con banconote da 20.
Quindi 85 sesterzi è la più grossa quantità di denaro che non può essere ottenuta usando solo banconote da 20 e 35 sesterzi.
Di conseguenza, se vogliamo obbligare il bancomat a darci qualche banconota da 5 sesterzi, la più grande quantità di denaro che possiamo ritirare è 85 sesterzi.

Soluzione del Quesito 5.

La risposta corretta è: 12.
Mostriamo che l'unica mossa vincente per Claudia è quella di staccare con un morso 12 cm di liquirizia, in modo da passare a Luca un pezzo di liquirizia lungo 15 cm.
A tale scopo basterà mostrare che le **situazioni perse** sono tutte e sole quelle in cui ci si ritrova a dover mordere una striscia di lunghezza $2^n - 1$, con n intero positivo.
Infatti, se si morde una striscia lunga $2^n - 1$ staccandone un pezzo non maggiore della metà, la striscia ottenuta ha una lunghezza del tipo:

$$2^{n-1} + k, \qquad \text{con } 0 \le k \le 2^{n-1} - 2. \tag{5}$$

Da una striscia di tipo (5) invece, poiché $k + 1$ non supera la metà di $2^{n-1} + k$, si può sempre staccare esattamente $k + 1$ centimetri con un morso, restituendo all'avversario una striscia lunga esattamente $2^{n-1} - 1$.
Di conseguenza, se si parte con una striscia di lunghezza $2^n - 1$, in un numero finito di mosse ci si ritrova deve mordere una striscia di lunghezza $2^1 - 1$, cioè 1. Quindi si perde.
Se invece la lunghezza di partenza non è del tipo $2^n - 1$, sarà necessariamente di tipo (5) e quindi si può forzare la vittoria.
Di conseguenza, essendo $2^4 - 1 < 27 < 2^5 - 1$, l'unica mossa vincente per Claudia è quella di mordere in modo da lasciare a Luca una striscia lunga $2^4 - 1$, cioè 15.
Deve quindi staccare, con un morso, 12 cm di liquirizia.

Soluzione del Quesito 6.

La risposta corretta è: 7.
Bisogna dire quanti numeri della forma

$$\mathbf{16 \sqcup 6 \sqcup} \tag{6}$$

sono divisibili per 15, cioè sono divisibili sia per 3 che per 5.
Dire che (6) è divisibile per 5 equivale a dire che la sua cifra delle unità è 0 o 5.
Quando la cifra delle unità è 0, affinché il numero sia anche divisibile per 3 bisogna che la cifra delle centinaia sia 2, 5 o 8. Questo perchè un numero è divisibile per 3 se e solo se lo è la somma delle sue cifre.
In modo del tutto analogo, quando la cifra delle unità è 5, quella delle centinaia deve essere 0, 3, 6 o 9.
Quindi ci sono in tutto 7 casi.

Soluzione del Quesito 7.

La risposta corretta è: 86.
Poiché la fattorizzazione di 707 è

$$707 = 7 \cdot 101$$

si tratta di contare i numeri interi tra 700 e 800 che non sono divisibili né per 7 né per 101.
I multipli di 7 tra 700 e 800 sono:

$$700,\ 707,\ 714,\ \dots 777,\ 784,\ 791,\ 798, \tag{7}$$

che sono 15.
Invece l'unico multiplo di 101 è 707, che è già contato nella lista (7).
Quindi i numeri da contare sono quelli tra 700 e 800 che non stanno nella lista (7), che sono $101 - 15$, cioè 86.

Soluzione del Quesito 8.

La risposta corretta è: 36.
Si tratta di stabilire qual è il massimo valore che posso ottenere come prodotto di 4 numeri interi positivi la cui somma sia 10.
Il massimo c'è senz'altro, visto che si tratta di un numero finito di casi.
Mostriamo che tale massimo è il valore che si ottiene con la quaterna di numeri:

$$3,\ \ 3,\ \ 2,\ \ 2, \tag{8}$$

il prodotto dei quali è 36.
A tale scopo osserviamo che, fissata la somma di due numeri interi positivi m ed n, il loro prodotto è massimo quando la loro differenza è minima.
Infatti, se $m - n \geq 2$, il prodotto aumenta passando dalla coppia m ed n alla coppia $m - 1$ ed $n + 1$ perché:

$$(m-1)(n+1) = mn + m - n - 1 = mn + (m - n - 2) + 1 \geq mn + 1$$

.
Se ora prendiamo una quaterna di numeri interi positivi con somma 10 che sia diversa dalla (8), tra essi possiamo sempre trovare una coppia di numeri la cui differenza sia maggiore o uguale a 2.
Di conseguenza si può aumentare il loro prodotto *"travasando"* un'unità dal più grande al più piccolo, lasciando invariata la loro somma.
Ciò significa che nessuna quaterna diversa dalla (8) può realizzare il massimo per il prodotto.
Ma siccome il massimo c'è per forza, visto che abbiamo un numero finito di casi, deve essere necessariamente quello fornito dalla (8).
Quindi il massimo è 36.

Soluzione del Quesito 9.

La risposta corretta è 32.
I triangoli rettangoli aventi vertici nell'insieme $\mathcal{U}$ sono di due tipi:

(**a**) quelli aventi per ipotenusa due vertici opposti dell'ottagono;

(**b**) quelli aventi il vertice dell'angolo retto nel centro dell'ottagono.

I triangoli del punto (a) sono 24 perché ci sono 4 modi di scegliere l'ipotenusa e, per ciascuno di questi, 6 modi di scegliere il terzo vertice del triangolo.
I triangoli del punto (b) invece sono 8, perché ci sono 8 modi per scegliere una coppia di raggi dell'ottagono che siano perpendicolari tra loro.
In tutto quindi i triangoli richiesti sono 32.

Soluzione del Quesito 10.

La risposta corretta è: 24.
Infatti, osservando la figura 1, notiamo che l'area del triangolo ABC è 6 volte quella del triangolo APC, perché $AB = 6AP$.
Analogamente, l'area del triangolo APC è 5 volte quella del triangolo APQ, perché $AC = 5AQ$.
Quindi l'area di ABC è 30 volte quella di APQ.

figura 1

Quindi, se indichiamo con x l'area di APQ e ricordiamo che l'area di $BCQP$ è $696\,\text{cm}^2$, otteniamo (vedi figura 2) che:

$$30x = x + 696$$

cioè $x = 24$.

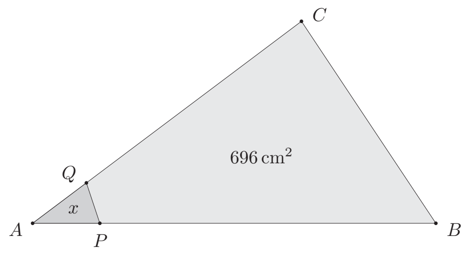


figura 2

Soluzione del Quesito 11.

La risposta corretta è 16.
Ogni divisore comune ad m ed n, divide necessariamente anche la loro differenza, cioè divide il numero:

$$m - n = 11118888 - 11112222 = 6666 = 6 \cdot 1111 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101.$$

La verifica diretta mostra che sia n che m sono divisibili per 2, 3, 11 e 101, che sono tutti numeri primi.
Quindi i divisori positivi comuni a m e n sono tutti e soli i numeri della forma:

$$2^{\alpha} \cdot 3^{\beta} \cdot 11^{\gamma} \cdot 101^{\delta}$$

dove α, β, γ e δ possono essere uguali a 0 o 1.
Quindi, al variare di tutti gli esponenti tra 0 e 1, i casi che si ottengono sono in tutto $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, cioè 16.

Soluzione del Quesito 12.

La risposta corretta è: solo **(c)**.
Per prima cosa osserviamo che dalle parole della prof.ssa si può dedurre **(c)**.
Infatti anche per il ragazzo che ha preso il voto più alto si può trovare una ragazza che ha preso un voto più alto di lui. Di conseguenza il suo voto è più basso del più alto voto conseguito da una ragazza.
Per trattare **(a)** e **(b)** pensiamo al seguente esempio: tutti i ragazzi prendono 9, una ragazza prende 10 e tutte le altre ragazze prendono 6.
In tale esempio, la proprietà dichiarata dalla prof.ssa è, banalmente, soddisfatta.
Tuttavia per ogni ragazza che ha preso 6 non si riesce a trovare un ragazzo che abbia preso meno di lei, quindi l'affermazione **(a)** non vale.
Inoltre la media dei voti dei ragazzi è 9, mentre quella delle ragazze è più bassa, quindi non vale nemmeno **(b)**.
Il fatto che esista un esempio in cui la proprietà enunciata dalla prof.ssa è verificata, ma non sono verificate né **(a)** né **(b)**, ci dimostra che queste ultime non sono deducibili dalle parole della prof.ssa.

Soluzione del Quesito 13.

La risposta corretta è: 10.
Visto che si tratta di numeri che si fattorizzano abbastanza bene la risposta poteva anche essere trovata con un calcolo diretto del *mcm*.
Tuttavia si potevano evitare i calcoli con qualche piccolo accorgimento.
Per prima cosa, visto che entrambi i numeri hanno in comune un fattore 1000, abbiamo:

$$mcm(2019000, 2012000) = 1000 \cdot mcm(2019, 2021).$$

Osserviamo ora che 2019 e 2021 non hanno divisori comuni diversi da 1, perché ogni eventuale divisore comune dovrebbe dividere anche la loro differenza, cioè 2. Ma 2 non può avere divisori comuni con 2019, che è dispari.
Dal fatto che 2019 e 2021 non hanno fattori in comune segue che:

$$mcm(2019, 2021) = 2019 \cdot 2021$$

e quindi

$$mcm(2019000, 2012000) = 1000 \cdot mcm(2019, 2021) = 1000 \cdot 2019 \cdot 2021,$$

che è banalmente un numero di 10 cifre.

Soluzione del Quesito 14.

La risposta corretta è: x^3y^2.
Anziché cercare direttamente il quarto monomio della lista, cerchiamo prima il secondo: se lo troveremo, potremo successivamente trovare prima il terzo e poi il quarto eseguendo due semplici moltiplicazioni.
Osserviamo che nella parte letterale del secondo monomio non può comparire un'altra lettera diversa da x e y, perché altrimenti, continuando a moltiplicare, tale lettera dovrebbe comparire anche in tutti i monomi successivi, compreso il sesto, che invece è uguale a x^8y^6.

Possiamo quindi supporre che il secondo monomio sia della forma

$$Ax^By^C, \tag{9}$$

dove A, B e C sono numeri da determinare, in modo che il sesto monomio sia x^8y^6.
Di conseguenza, se il primo monomio è xy^2 e ogni monomio, dal terzo in poi, si ottiene moltiplicando i due che lo precedono, la lista che si ottiene è la seguente:

$$xy^2,\ \ Ax^By^C,\ \ Ax^{B+1}y^{C+2},\ \ A^2x^{2B+1}y^{2C+2},\ \ A^3x^{3B+2}y^{3C+4},\ \ A^5x^{5B+3}y^{5C+6}.$$

Se vogliamo che il sesto polinomio della lista sia proprio x^8y^6, bisogna che sia

$$\begin{cases} A^5 = 1 \\ 5B+3 = 8 \\ 5C+6 = 6 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \\ C = 0. \end{cases}$$

Ciò significa che il secondo monomio è banalmente x e quindi la lista dei sei monomi è:

$$xy^2, \quad x, \quad x^2y^2, \quad x^3y^2, \quad x^5y^4, \quad x^8y^6.$$

Il monomio che ci viene richiesto è appunto il quarto.

Soluzione del Quesito 15.

La risposta corretta è: 4320.
Il *cubo forato* di figura **3**

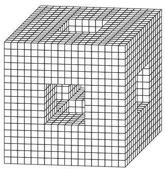


figura 3

si ottiene togliendo ad un cubo pieno (che ha volume di 18^3cm^3) la *croce* di figura **4**

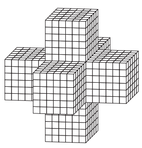


figura 4

che è composta da 7 cubetti di lato 6 cm.
Quindi il volume del cubo forato è:

$$18^3\text{cm}^3 - 7\cdot 6^3\text{cm}^3 = 6^3(3^3-7)\,\text{cm}^3 = 216\cdot 20\,\text{cm}^3 = 4320\,\text{cm}^3.$$

Soluzione del Quesito 16.

La risposta corretta è: 540°.
La somma cercata è 540° perché è uguale alla somma degli angoli interni del pentagono convesso $ABCDE$.
Infatti, come si può osservare in figura 5, si ha:

$$\widehat{EFG} + \widehat{FGA} = 180° - \widehat{FPG} = 180° - \widehat{APE} = \widehat{EAP} + \widehat{PEA}$$

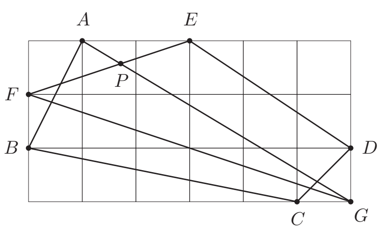


figura 5

Quindi la somma di 4 dei 7 angoli che ci interessano si può riscrivere così:

$$\begin{aligned}\widehat{DEF} + \widehat{EFG} + \widehat{FGA} + \widehat{GAB} &= \widehat{DEF} + \left(\widehat{EFG} + \widehat{FGA}\right) + \widehat{GAB} = \\ &= \widehat{DEF} + \left(\widehat{EAP} + \widehat{PEA}\right) + \widehat{GAB} = \\ &= \left(\widehat{DEF} + \widehat{PEA}\right) + \left(\widehat{EAP} + \widehat{GAB}\right) = \\ &= \widehat{DEA} + \widehat{EAB}.\end{aligned}$$

Di conseguenza la somma cercata diventa:

$$\begin{aligned}&\widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDE} + \left(\widehat{DEF} + \widehat{EFG} + \widehat{FGA} + \widehat{GAB}\right) = \\ = &\widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDE} + \left(\widehat{DEA} + \widehat{EAB}\right),\end{aligned}$$

che è proprio la somma degli angoli interni di $ABCDE$.

Soluzione del Quesito 17.

La risposta corretta è: 91.
Dal teorema di Ruffini segue che $p(x)$ deve essere divisibile esattamente sia per $(x-7)$ che per $(x-13)$.
Quindi, essendo $p(x)$ di grado 3, si avrà:

$$p(x) = (x-7)(x-13)(ax+b) \tag{10}$$

Svolgendo i prodotti si ottiene:

$$p(x) = ax^3 + (b-20a)x^2 + \ldots \tag{11}$$

Siccome sappiamo che i coefficienti di $p(x)$ sono tutti interi, dalla (11) segue che a e $b-20a$ devono essere interi, cosa che può succedere solo se a e b sono entrambi interi.
Possiamo quindi concludere che $p(x)$ è della forma (10) con a e b interi.
Di conseguenza:

$$p(0) = (0-7)(0-13)(a\cdot 0+b) = 91b \quad \text{con } b \text{ intero.}$$

Ma allora, al variare di b negli interi, l'unico valore positivo di due cifre che posso ottenere per $p(0)$ è 91.

Soluzione del Quesito 18.

La risposta corretta è: 12000.
È facile verificare che i triangoli PHQ e QKR (vedi figura 6) sono simili perché hanno gli angoli corrispondenti uguali.
Da ciò segue che il rapporto tra base ed altezza nei due triangoli è lo stesso, cioè vale la proporzione

$$\overline{PS} : \overline{QH} = \overline{QT} : \overline{RK}.$$

Di conseguenza, visto che il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi, si ottiene:

$$\overline{QH}\cdot\overline{QT} = \overline{PS}\cdot\overline{RK} = 100\,\text{cm}\cdot 120\,\text{cm} = 12000\,\text{cm}^2.$$

Per concludere basta ora osservare che $\overline{QH}\cdot\overline{QT}$ è proprio l'area cercata.

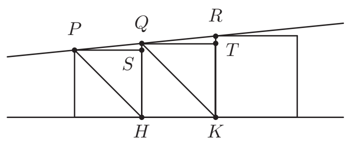


figura 6