Roma, 14 Aprile 2011 - Università di Roma Tor Vergata

Progetto Olimpiadi della Matematica

# Prima Disfida Matematica "Urbi et Orbi"

(in preparazione alla finale nazionale di Cesenatico)

**1.** Qual è il più piccolo numero intero strettamente positivo il cui cubo è dividibile per 11340?

**2.** Sia $n = 999999^3 - 856856^3 - 143143^3$. Quanti sono i divisori dispari di $n$? (N.B. tra i divisori di un numero vanno considerati anche 1 ed il numero stesso)

**3.** Quanti sono gli anagrammi, anche senza senso, della parola **TELEPAPPAGALLE** che hanno la seguente proprietà: se dall'anagramma si cancellano le prime 3 lettere, le rimanenti 11 si presentano in ordine alfabetico.

**4.** Nel triangolo $ABC$ ciascuno dei 3 lati è stato diviso in 7 parti uguali inserendo 6 punti, dopodiché il triangolo è stato suddiviso in 49 zone tracciando dei segmenti come indicato nella figura **1**. Infine le zone sono state colorate di grigio o di bianco, come indicato in figura.

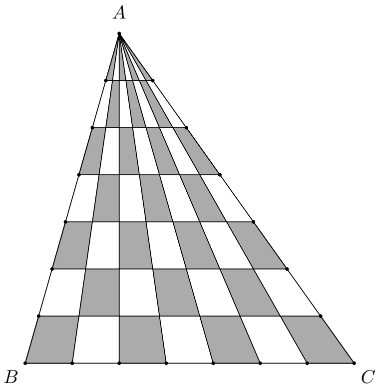


figura 1

Sapendo che l'area complessiva delle zone grigie è $2450 \text{cm}^2$, dire quanto vale, sempre in $\text{cm}^2$, l'area complessiva del triangolo $ABC$.

**5.** In ognuna delle 400 caselle di una tabella $20 \times 20$ viene scritto un numero intero non negativo in modo che valgano le seguenti regole:

- **a.** nella colonna più a sinistra ci sono tutti zeri;
- **b.** una delle righe (non viene specificato quale), oltre a contenere zero nella prima casella, nelle successive 19 caselle contiene i primi 19 numeri dispari, messi in ordine crescente;
- **c.** prese comunque 3 caselle $A$, $B$ e $C$, disposte in modo che $B$ sia la casella immediatamente a destra di $A$ e $C$ sia quella immediatamente sotto $B$ (vedi figura **2**), il numero scritto nella casella $C$ è sempre uguale alla somma dei numeri scritti nelle caselle $A$ e $B$.

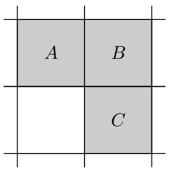


figura 2

Dire qual è il minimo valore che può assumere la somma dei 20 numeri della prima riga, cioè della riga più in alto.

**6.** Quanti sono i numeri interi compresi tra 1 e 2011 che non sono esprimibili come differenza di due quadrati perfetti? (N.B. notare che anche 0 è un quadrato perfetto)

**7.** Una pulce si muove saltando su una scacchiera $10 \times 10$ (vedi figura **3**). I salti ammessi sono solo quelli tra due caselle adiacenti, cioè aventi un lato in comune.

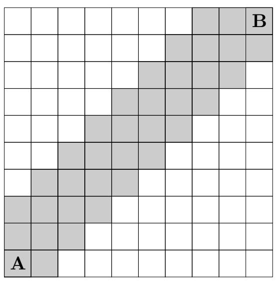


figura 3

Se la pulce parte dalla casella contrassegnata con la lettera **A**, in quanti modi diversi può arrivare alla casella contrassegnata dalla **B**, compiendo un percorso composto da 18 salti e tutto contenuto nella zona evidenziata in grigio?

**8.** Per quanti numeri interi non negativi $n$ è possibile trovare $x$, $y$ e $z$ reali e non negativi tali che $x+y+z=87$ e $2xy+2xz+2yz=n^2$.

**9.** Trovare il coefficiente di $x^3$ nello sviluppo di $(1+x+x^2)^{36}$.

**10.** *Papi* ha 12 caramelle: 4 bianche, 4 rosse e 4 verdi. In quanti modi diversi può distribuirle alle sue tre figliole, in modo che ciascuna ne abbia almeno una?

**11.** Qual è il più grande intero $n$, tale che esiste almeno un intero $m$, con $0 \leq m \leq 10000$, tale che $2m+1$ ha esattamente $n$ divisori?
(N.B. tra i divisori del numero $2m+1$ vanno considerati anche 1 e il numero stesso)

**12.** Quanti sono gli anagrammi, anche senza senso, della parola **NEOZOICO** che non hanno consonanti consecutive?

**13.** Si prendano 64 piani distinti nello spazio, passanti tutti per lo stesso punto $P$. Qual è, al variare di tutti i possibili modi in cui posso scegliere i 64 piani passanti per $P$, il massimo numero di regioni in cui le spazio rimane da essi suddiviso?

**14.** Quanti sono i parallelepipedi retti, aventi volume di $10^7$cm$^3$ e le aree di tutte le facce che, espresse in cm$^2$ sono intere? (N.B. due parallelepipedi retti vanno considerati identici, e quindi contati una volta sola, quando hanno gli spigoli della stessa misura, a prescindere da quali siano lunghezza, larghezza e altezza)

**15.** Nel triangolo $ABC$ (vedi figura **4**) sappiamo che $8AP = AB$, $8BQ = BC$ e $8CR = CA$.

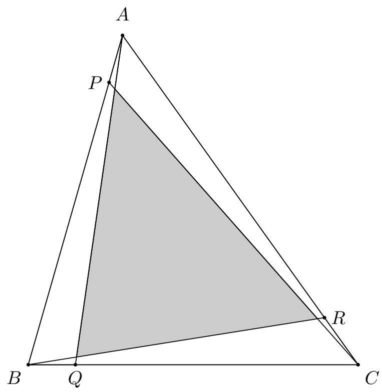

figura 4

Tracciando i segmenti $AQ$, $BR$ e $CP$ il triangolo $ABC$ rimane diviso in 7 zone. Di queste, l'unica che non tocca il bordo (che in figura è evidenziata in grigio) ha area di 4620cm$^2$.
Qual è, espressa in cm$^2$, l'area di $ABC$?

**16.** Una parola $\mathcal{P}$ verrà detta **buona** se ha le seguenti proprietà:

**a**. non contiene alcuna lettera diversa da **A**, **B**, **C** o **D**;
**b**. due lettere consecutive di $\mathcal{P}$ che siano entrambe consonanti, non sono mai uguali.

Quante sono le parole **buone** di 8 lettere che iniziano per **B**?

**17.** Sia $p(x)$ un polinomio non identicamente nullo che soddisfa la condizione

$$xp(x) = (x-1)p\left(x + \frac{1}{2011}\right).$$

Calcolare la somma di tutti i numeri reali $\lambda$ tali che $p(\lambda) = 0$.

**18.** Un quadrilatero convesso $\mathcal{Q}$ ha un punto interno $P$ con le seguenti proprietà:

**a**. ogni retta passante per $P$ taglia $\mathcal{Q}$ in due parti aventi la stessa area;
**b**. tra tutti i segmenti passanti per $P$ ed aventi gli estremi sul bordo di $\mathcal{Q}$, quello più piccolo misura 20cm e quello più grande 52cm.

Sapendo che $\mathcal{Q}$ ha il perimetro di 116cm dire quanto vale, in cm$^2$, la sua area.

**19.** Sia $n$ la parte intera di $\left(\sqrt{2600}+50\right)^{100}$. Che resto si ottiene dividendo $n$ per 10000?

**20.** Nel pentagono convesso $ABCDE$ sappiamo che i triangoli $ABC$ e $BCD$ hanno l'area di 273cm$^2$, mentre i triangoli $CDE$, $DEA$ e $EAB$ hanno l'area di 700cm$^2$. Quanto vale, in cm$^2$, l'area del pentagono $ABCDE$?

# Risposte

| | |
|---|---|
| Problema 1 | 630 |
| Problema 2 | 2000 |
| Problema 3 | 184 |
| Problema 4 | 4802 |
| Problema 5 | 55 |
| Problema 6 | 503 |
| Problema 7 | 4181 |
| Problema 8 | 72 |
| Problema 9 | 8400 |
| Problema 10 | 3003 |
| Problema 11 | 36 |
| Problema 12 | 2400 |
| Problema 13 | 4034 |
| Problema 14 | 2432 |
| Problema 15 | 7315 |
| Problema 16 | 3927 |
| Problema 17 | 1006 |
| Problema 18 | 660 |
| Problema 19 | 9999 |
| Problema 20 | 1883 |