Progetto Olimpiadi della Matematica

Seconda Disfida Matematica "Urbi et Orbi"

Argomento: Calcolo Combinatorio

(in preparazione alla finale nazionale di Cesenatico)

1. In ogni casella della seguente tabella irregolare:

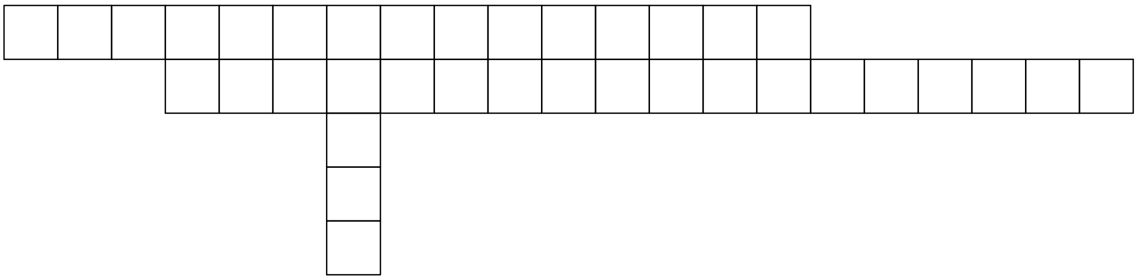

figura 1

si scrive un numero intero $k \geq 1$, in modo che il numero contenuto in ogni casella sia strettamente maggiore sia di quello che gli sta immediatamente a sinistra sia di quello che gli sta immediatamente sotto. (Attenzione: è ammesso anche mettere lo stesso numero in più di una casella)
Se, per ogni fissata configurazione di numeri sulla tabella, indichiamo con M il valore massimo tra tutti quelli scritti nelle caselle, qual è il minimo valore che può avere M?

2. Un *doppio tris* è un insieme di 6 carte da gioco, 3 delle quali hanno il medesimo valore e le altre 3 un altro (per esempio, 3 donne e 3 assi). Qual è il numero minimo di carte da prendere (a caso) da un mazzo da 52 carte (13 carte per ogni seme) per avere la certezza che fra di esse ci sia almeno un doppio tris?

3. In quanti modi posso suddividere un gruppo di 12 persone in 3 squadre di 4 persone ciascuna. (due suddivisioni vanno considerate identiche, e quindi contate una sola volta, se ogni persona si trova ad avere gli stessi compagni di squadra)

4. Nel piano cartesiano si consideri l'insieme $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = \pm 1,\ y = 1, 2, \ldots, 10\}$, che è costituito da 20 punti.
Quanti sono i triangoli non degeneri aventi per vertici 3 punti di $\mathcal{A}$?

5. Trovare quanti sono i trapezi non degeneri con le seguenti proprietà:

a. i due angoli interni adiacenti alla base maggiore sono congruenti;
b. le misure dei 4 lati, espresse in centimetri, sono numeri interi strettamente positivi;
c. il perimetro è di 212cm.

(Note: due trapezi congruenti vanno considerati identici e quindi contati una volta sola; inoltre si noti che non è stato escluso il caso in cui base maggiore e base minore siano uguali)

6. Si immagini di scrivere la lista, in ordine alfabetico, di tutti gli anagrammi della parola **PINOTTO** che non hanno mai vocali vicine tra loro. In tale lista, nella prima posizione si trova la parola **INOPOTT**, mentre la parola **PINOTTO** si trova molto più in giù, alla posizione $n-$esima. Quanto vale n?

7. Abbiamo a disposizione 3 tipi di dischi: gialli (dello spessore di 6cm), rossi (dello spessore di 10cm) e verdi (dello spessore di 15cm). Per ciascun tipo ne abbiamo tantissimi.
Vogliamo costruire una colonna alta esattamente 90cm impilando alcuni dischi, ma facendo in modo che i dischi gialli utilizzati siano di più sia dei rossi che dei verdi.
Quante diverse colonne posso costruire?
(due colonne sono uguali se, partendo dalla base e salendo, la sequenza di dischi che le costituisce è la stessa)

8. In quanti modi posso scrivere il numero 828 come somma di 40 numeri interi strettamente positivi, tutti diversi tra loro? (non tener conto dell'ordine degli addendi: due somme contenenti gli stessi termini in ordine diverso vanno considerate uguali e quindi contate una volta sola)

9. Un cubo col lato di 20cm è stato ottenuto incollando tra loro 8000 cubetti col lato di un centimetro. Un pistolero lo getta in aria e gli spara una pallottola (che supponiamo puntiforme!) che lo trapassa da parte a parte.
Qual è il massimo numero di cubetti che può aver bucato?

10. Una palla di legno (piena) viene dipinta di rosso. Un samurai, la lancia in aria e, grazie alla sua straordinaria abilità, mentre è in volo riesce a tagliarla di netto per ben 30 volte con la sua spada affilatissima.
In tal modo la palla viene sezionata con 30 tagli piani e rimane quindi suddivisa in tantissimi pezzi, alcuni dei quali hanno la superficie parzialmente colorata di rosso, mentre gli altri hanno tutta la superficie *color legno*.
Quanti possono essere, al massimo, i pezzi la cui superficie è interamente *color legno*?

11. Indicato con T_n l'$n-$esimo numero triangolare (cioè $T_n = 1+2+3+\ldots+n$), dire quanto vale l'espressione $\frac{1}{980} \cdot (T_{46} \cdot T_1 + T_{45} \cdot T_2 + T_{44} \cdot T_3 + \ldots + T_2 \cdot T_{45} + T_1 \cdot T_{46})$.

12. Una parola viene detta **ripetitiva** se si può spezzarla in 2 o più parole uguali. Ad esempio sono ripetitive le parole **ABABAB**, **ABCABC** e **CCBACCBACCBA**, mentre non lo è la parola **ABCDCBA**. In particolare sono ripetitive tutte le parole lunghe almeno 2 lettere, con le lettere tutte uguali.
Quante sono le parole ripetitive lunghe al più 11 lettere e non contenenti alcuna lettera successiva alla **E** (cioè dalla **F** in poi)?

13. Trovare quante sono le quaterne (a, b, c, d) di numeri interi positivi tali che esiste un tetraedro con volume non nullo e superficie totale uguale a 12cm^2, le cui 4 facce hanno aree che, espresse in cm^2, sono proprio uguali ad a, b, c e d.

14. Abbiamo a disposizione un alfabeto di 8 lettere. Dire quante sono le parole $\mathcal{P}$ che hanno le seguenti proprietà:

a. $\mathcal{P}$ è lunga almeno 3 lettere;
b. tutte le lettere che compongono $\mathcal{P}$ sono diverse;
c. togliendo una sola lettera, è possibile trasformare $\mathcal{P}$ in una parola avente tutte le lettere in ordine alfabetico crescente.

15. In ogni casella di una scacchiera rettangolare 6×8 si vuole scrivere un numero intero strettamente positivo e non superiore a 14. In quanti modi è possibile farlo, rispettando l'ordinamento parziale delle caselle? (cioè facendo in modo che su ogni riga i numeri siano in ordine strettamente crescente passando da sinistra a destra, e su ogni colonna siano in ordine strettamente crescente passando dal basso all'alto)

16. In quanti modi diversi posso colorare le 9 facce di un prisma retto con le basi a forma di ettagono regolare, in modo che ciascuna faccia sia colorata di bianco o di nero?
Attenzione: due prismi si considerano colorati allo stesso modo (e quindi vanno contati una sola volta) se esiste un movimento rigido (cioè una rototraslazione) nello spazio che li fa sovrapporre in modo che si sovrappongano anche i colori.

17. In quanti modi posso mettere in fila i numeri da 1 a 18 in modo che siano rispettate le seguenti condizioni:

a. la somma di due numeri che occupano due posizioni consecutive è sempre dispari;
b. la differenza tra un numero e la posizione che occupa ha sempre valore assoluto non superiore a 2 (si immagini che anche le posizioni siano numerate da 1 a 18).

18. Un anagramma della parola **ABCDEFGHIL** verrà detto **buono** se è possibile *spezzarlo* in due parole, ciascuna delle quali presenta le lettere che la compongono in ordine alfabetico crescente.
Ad esempio l'anagramma **ABCGILDEFH** è buono perché spezzandolo dopo la **L** si ottengono le parole **ABCGIL** e **DEFH** che hanno le lettere in ordine alfabetico, mentre non è buono l'anagramma **ACDBELFGHI**. In particolare la parola iniziale **ABCDEFGHIL** è buona.
Quanti sono, in tutto, gli anagrammi buoni della parola **ABCDEFGHIL**?

19. Dire in quanti modi diversi si possono inserire i numeri interi da 1 a 18 nella seguente tabella:

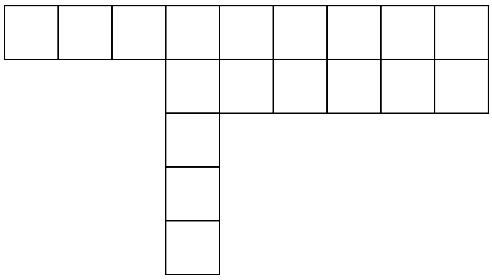

figura 2

in modo che ogni casella contenga un numero diverso e che il numero contenuto in ciascuna casella sia maggiore sia di quello che gli sta immediatamente a sinistra sia di quello che gli sta immediatamente sotto.

20. Seguendo le notazioni del problema **18**, diremo che un anagramma della parola **ABCDEFGH** è **semi-buono** se è possibile *spezzarlo* in tre parole ciascuna delle quali presenta le lettere che la compongono in ordine alfabetico crescente.
Quanti sono, in tutto, gli anagrammi semi-buoni della parola **ABCDEFGH**?
(attenzione: si sconsiglia di affrontare questo problema se prima non si è risolto il problema **18**)

Risposte

Problema 1	18
Problema 2	29
Problema 3	5775
Problema 4	900
Problema 5	2757
Problema 6	254
Problema 7	2999
Problema 8	22
Problema 9	58
Problema 10	3654
Problema 11	2162
Problema 12	4090
Problema 13	85
Problema 14	3006
Problema 15	3003
Problema 16	56
Problema 17	3026
Problema 18	1014
Problema 19	8899
Problema 20	4541