Roma, 12 Aprile 2013 - Università di Roma Tor Vergata

Progetto Olimpiadi della Matematica

Terza Disfida Matematica "Urbi et Orbi"

(in preparazione alla finale nazionale di Cesenatico)

1. Dire che coefficiente si ottiene per x^6 dopo aver svolto i prodotti e sommato i termini simili nella seguente espressione:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{2013})^3.$$

2. Quanti sono gli interi n, con $1000 \le n \le 2013$, tali che, dette c_1, c_2, c_3 e c_4 le cifre, rispettivamente, di migliaia, centinaia, decine ed unita di n, si ha che $c_1 \le c_2 \le c_3 \le c_4$ oppure $c_1 \ge c_2 \ge c_3 \ge c_4$.

3. Una pulce si muove saltando su una scacchiera 6×6 (vedi figura **3**). I salti ammessi sono solo quelli tra due caselle adiacenti, cioè aventi un lato in comune.

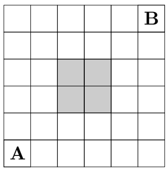

figura 1

Se la pulce parte dalla casella contrassegnata con la lettera **A**, in quanti modi diversi può arrivare alla casella contrassegnata dalla **B**, compiendo un percorso composto da 10 salti e che passi per almeno due delle caselle colorate in grigio?

4. Quante sono le coppie (a, b) di interi strettamente positivi e minori o uguali a 100 tali che $a^2 + 5b^2 = 6ab$?

5. Il numero S si ottiene calcolando la seguente espressione:

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) + (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) + (3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) + \ldots\ldots + (994 \cdot 995 \cdot 996 \cdot 997) + (995 \cdot 996 \cdot 997 \cdot 998)\,.$$

Che resto si ottiene dividendo S per 1000?

6. Su un tavolo ci sono 2 pile di monete, una di 2013 monete e l'altra di 1652. Claudia e Luca giocano con le seguenti regole:
1. muovono a turno, cominciando da Luca;
2. per muovere si sceglie una colonna e da essa si toglie una quantità di monete a piacere, ma comunque almeno una e non più di 500;
3. perde chi si ritrova a dover muovere con entrambe le colonne vuote.
Qual è il minimo numero di monete che Luca deve togliere con la prima mossa, se vuole essere sicuro di poter poi vincere, qualsiasi siano le contromosse di Claudia? (Se si ritiene che non ci sia alcuna mossa che permetta a Luca di essere sicuro di vincere, si indichi come risposta 0.)

7. Un esagono $ABCDEF$ è inscritto in una circonferenza. Inoltre, detti P l'intersezione tra AD e BE, Q quella tra AD e CF e R quella tra BE e CF, sappiamo che il triangolo PQR è equilatero.
Se l'esagono ha l'angolo interno in A che vale $96°$, quanto vale la somma degli angoli interni in C, D ed E?

8. Quanti sono i divisori positivi di 8100^9 che sono minori di 90^9 ma che non dividono 90^9?

9. Sia $\dfrac{m}{n}$ la frazione, ridotta ai minimi termini, che si ottiene calcolando la somma:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}.$$

Che resto si ottiene dalla divisione $n : m$?

10. Un ottagono è inscritto in una circonferenza. Sappiamo che 4 dei suoi lati (ma non sappiamo quali) misurano 20 cm, mentre gli altri quattro misurano $11\sqrt{2}$ cm. Quanto vale (in centimetri quadrati) il quadrato del raggio della circonferenza in cui l'ottagono è inscritto? (se si ritiene che i dati forniti siano insufficienti dare come risposta 0)

11. Sia U l'insieme di tutti i numeri interi strettamente positivi e non maggiori di 9999 che siano della forma $2013^n 2^m$, con n e m interi non negativi.
Quanti sono i sottoinsiemi A di U, non vuoti e con la seguente proprietà: *se* $x \in A$ *allora* $2x \notin A$?

12. In ciascuna delle 400 caselle di una tabella quadrata 20×20 viene messo un numero intero rispettando le seguenti regole:

1. nella casella di vertice in basso a sinistra si mette 0;
2. in tutte le caselle ancora vuote della riga più in basso si mette 1;
3. in tutte le caselle ancora vuote della colonna più a sinistra si mette -1;
4. tutte le altre caselle vengono riempite in modo che ognuna di esse contenga la somma tra la casella che gli sta immediatamente sotto e quella che gli sta immediatamente a sinistra.

Qual è il numero più grande che compare nella tabella? (se fosse più grande di 9999 indicare le sue 4 cifre più basse)

13. Sia $p(x)$ un polinomio di grado 1987 con la seguente proprietà: quando lo si divide per i binomi $(x+3)$, $(x+2)$, $(x+1)$, $(x-1)$, $(x-2)$ e $(x-3)$, si ottengono come resti, rispettivamente, 1, 2, 3, 5, 6 e 1987.
Indichiamo con $r(x)$ il polinomio che si ottiene come resto dividendo $p(x)$ per il polinomio $b(x) = (x+3)(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$.
Qual è il termine noto di $r(x)$?

14. In un prisma retto a base triangolare tutti gli spigoli, sia di base che laterali, hanno la stessa lunghezza. Siano A, B e C i vertici di una base e D, E ed F i vertici dell'altra, in modo che i tre spigoli laterali siano AD, BE e CF. Presi un punto P su AB e un punto Q su AC in modo che $AB = 15\,AP$ e $AC = 8\,AQ$, sia $\mathcal{F}$ l'intersezione tra il tetraedro $APQD$ e la piramide che ha base $CBEF$ e vertice A.
Sapendo che il volume di $\mathcal{F}$ è di $1\,\mathrm{m}^3$, dire quanto vale, in metri cubi, il volume del prisma.

15. Pinco Pallino lavora al Ministero del Benessere dell'isola *Kenoncè*. La sua occupazione è sbrigare le 8 pratiche che vengono via via messe in pila sulla sua scrivania durante la giornata, ciascuna contrassegnata con un numero da 1 a 8, che indica l'ordine con cui la pratica gli è stata portata. Pallino però non svolge le pratiche nell'ordine con cui arrivano ma, ogni volta che ne ha finita una, ne prende un'altra dalla cima della pila che si è formata fino a quel momento sulla sua scrivania.
Ad esempio, se arriva tardi e le 8 pratiche sono già tutte impilate sulla sua scrivania, le sbrigherà in ordine inverso. Se invece è molto veloce e riesce sempre a terminare una pratica prima che arrivi la successiva, allora le svolgerà esattamente nell'ordine con cui arrivano. La maggior parte delle volte, comunque, gli capita di svolgerle in un ordine che non è né quello di arrivo né quello inverso.
In quanti possibili ordini diversi può capitargli di svolgere le pratiche? (se il numero trovato fosse maggiore di 9999, indicare come risposta 9999)

16. Con l'arrivo della Grande Crisi, le regole del lavoro di Pinco Pallino (vedi problema **15**) sono un po' cambiate: le pratiche da sbrigare ogni giorno non sono più 8 ma 10, inoltre, per aumentare la sua produttività, non appena la pila delle pratiche in attesa sulla sua scrivania supera le 3 unità, un elettrodo impiantatogli nel collo gli somministra una dolorosa scossa elettrica.
Per tutto il resto le regole sono rimaste identiche a prima: le pratiche vengono via via messe in una pila sulla sua scrivania ed egli le svolge prendendole dalla cima della pila.
Quanti sono i diversi ordini in cui può svolgere le pratiche senza mai prendere la scossa?

17. I numeri a_1, a_2, $\ldots$, a_{2013} sono tali che per ogni $1 \le n \le 2013$ si ha $n^2 a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
Se $a_1 = 2013$, quanto vale $1/a_{2013}$?

18. Sia $ABCD$ un tetraedro regolare con lo spigolo di 1001 mm. Si prendano i punti P, Q, R ed S sugli spigoli AB, BC, CD e DA, rispettivamente, in modo che i triangoli ABR, BCS, CDP e DAQ contengano tutti uno stesso punto O interno al tetraedro. Sapendo che $AP = 231\,\mathrm{mm}$, $BQ = 455\,\mathrm{mm}$ e $CR = 616\,\mathrm{mm}$ dire quanto vale, in millimetri, la misura di DS.

19. Ad una crociera partecipano 34 persone (17 coppie marito-moglie). La durata della crociera non è fissata a priori ma determinata attraverso un gioco. Prima di salire sulla nave, vengono formate 17 coppie uomo-donna (non necessariamente coincidenti con gli accoppiamenti marito-moglie) che serviranno per le danze che si svolgeranno ogni sera. Inoltre, la mattina del giorno in cui la crociera ha inizio, mentre le 34 persone salgono sulla nave, il capitano consegna a ciascun uomo un oggetto diverso. Il gioco consiste in questo: ogni sera, prima del ballo, ciascun uomo consegna l'oggetto che detiene alla propria moglie, la quale, alla fine del ballo lo consegna al proprio compagno di ballo. La sera successiva tutto si ripete, utilizzando l'oggetto che si è ricevuto la sera precedente. Il gioco, e anche la crociera, terminano nell'istante in cui tutti gli uomini, simultaneamente, si ritrovano ad avere lo stesso oggetto che era stato loro consegnato il giorno della partenza.
Quanti giorni può durare, al massimo, la crociera?

20. A una scacchiera 8×8 sono state tolte 16 caselle, ottenendo la configurazione di caselle indicata nella figura **2**.

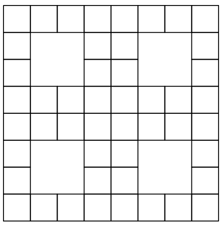

figura 2

In quanti modi diversi si può ricoprire completamente tale configurazione usando 24 tessere rettangolari, ciascuna delle quali ha le dimensioni tali da coprire esattamente due caselle contigue?
(Attenzione: due ricoprimenti che si possono ottenere l'uno dall'altro ruotando la scacchiera NON vanno considerati equivalenti e quindi vanno contati entrambi)

Risposte

Problema 1	28
Problema 2	169
Problema 3	168
Problema 4	120
Problema 5	776
Problema 6	140
Problema 7	408
Problema 8	4779
Problema 9	18
Problema 10	541
Problema 11	4934
Problema 12	8700
Problema 13	103
Problema 14	2160
Problema 15	1430
Problema 16	4181
Problema 17	1007
Problema 18	715
Problema 19	210
Problema 20	484