Roma, 11 Aprile 2014 - Università di Roma Tor Vergata

Progetto Olimpiadi della Matematica

Quarta Disfida Matematica "Urbi et Orbi"

(in preparazione alla finale nazionale di Cesenatico)

1. La parola **AFFOSSATO** ha le due lettere **O** separate da 4 lettere. Quanti sono i suoi anagrammi, anche senza senso, con la stessa proprietà?

2. Di un numero intero n sappiamo che ha 4.324.320 divisori positivi (contando anche 1 ed n) Quanti sono, al massimo, i numeri primi che compaiono nella sua fattorizzazione?

3. Trovare in quanti modi il numero 14 si può scrivere come somma di numeri interi strettamente positivi tenendo conto dell'ordine. (Ad esempio: $1+4+9$ e $4+9+1$ vanno considerati diversi e quindi contati entrambi)

4. Di un numero intero n sappiamo che ha 99000 divisori positivi (contando anche 1 ed n) Quanti sono, al minimo, i quadrati che lo dividono? (contando anche 1)

5. Si considerino tutte le liste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ di interi positivi, eventualmente anche uguali tra loro, e tali che $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 10000$.
Tra tutte le liste con tale proprietà si prendano solo quelle che rendono massimo il prodotto $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$.
Tra queste ultime qual è il minimo valore che può avere n?

6. Da un pavimento rettangolare $ABCD$ coi lati AB di $12\,\mathrm{m}$ e BC di $9\,\mathrm{m}$, tolgo una zona rettangolare $APQR$, tutta contenuta in $ABCD$ e con i lati AP di $10\,\mathrm{m}$ e AR di $7\,\mathrm{m}$.
Ciò che rimane è una regione $PBCDRQ$, a forma di *"elle"*, che bisogna ricoprire con 19 lastre di marmo rettangolari delle dimensioni di $1\,\mathrm{m}\times 2\,\mathrm{m}$.
In quanti modi diversi posso farlo?

7. Trovare il risultato della somma:

$$\binom{4}{4}+\binom{6}{4}+\binom{8}{4}+\binom{10}{4}+\ldots+\binom{202}{4}+\binom{204}{4}.$$

Se il risultato è maggiore di 9999 indicare come risposta le 4 cifre più basse, cioè migliaia, centinaia, decine e unità.

8. Una pulce salta tra i vertici di un cubo: ogni salto avviene tra due vertici congiunti da uno spigolo scegliendo ogni volta con la stessa probabilità su quale dei 3 vertici disponibili saltare.
Sia $p = \dfrac{m}{n}$ la frazione (ridotta ai minimi termini) che indica la probabilità che dopo 15 salti la pulce si trovi sul vertice opposto da quello da cui è partita.
Quanto vale il suo numeratore m?
Se il risultato è maggiore di 9999 indicare come risposta le 4 cifre più basse, cioè migliaia, centinaia, decine e unità.

9. Dopo aver posto $a_0 = 624$, per ogni n intero strettamente positivo definiamo $a_n = 624^{a_{n-1}}$.
Dire che resto si ottiene dividendo a_{2014} per 10000.

10. Dire che coefficiente si ottiene per x^{11} dopo aver svolto i prodotti e sommato i termini simili nella seguente espressione:

$$\left(1+2x+3x^2+4x^3+\ldots+2014x^{2013}\right)^9.$$

Se il risultato fosse maggiore di 9999 dare come risposta le quattro cifre più basse: migliaia, centinaia, decine e unità.

11. Su una scacchiera infinita immaginiamo di mettere il numero 1 in una casella e il numero 0 in tutte le altre.
Fatto ciò facciamo **evolvere** la situazione con la regola seguente: *in ogni casella sostituiamo il numero che c'è con quello che si ottiene sommando i numeri delle 4 caselle ad essa contigue*
Ad esempio, dopo aver fatto **evolvere** una sola volta la situazione iniziale, ci ritroviamo ad avere 1 nelle 4 caselle contigue a quella in cui avevamo messo inizialmente 1, mentre ci ritroviamo 0 in tutte le altre caselle (compresa quella inizialmente posta uguale a 1).
Se invece facciamo **evolvere** la situazione non 1 ma 15 volte, indichiamo con n il numero che ci ritroviamo in ciascuna delle 4 caselle contigue a quella inizialmente posta uguale a 1.
Quanto vale $\sqrt{n}$?

12. Un terreno ha la forma di un rettangolo $ABCD$ col lato AB di $70\,\mathrm{m}$ e il lato BC di $30\,\mathrm{m}$. Viene suddiviso in 21 lotti quadrati col lato di $10\,\mathrm{m}$, e ciascun lotto viene seminato con una coltivazione a scelta tra carote, patate e rape, in modo che due lotti confinanti (cioè aventi un lato in comune) ospitino coltivazioni diverse. In quanti modi diversi si possono distribuire le coltivazioni, se di vuole che, dei 3 lotti adiacenti al lato BC, uno sia coltivato a patate e gli altri due a carote?

13. Un papà ha quattro figli: Ada, Ida, Ugo e Pio. Ada e Ida sono gemelle identiche, e così pure Ugo e Pio. Il papà deve distribuire loro 100 caramelle, ma siccome non ha ancora imparato a distinguere i gemelli, quando da un numero diverso di caramelle a due figli che siano tra loro gemelli, non distingue tra le due diverse situazioni che gli si possono presentare. Ad esempio darne 3 ad Ada e 19 ad Ida per lui è la stessa cosa che darne 19 ad Ada e 3 ad Ida.
Quante sono, dal punto di vista del papà, i diversi modi di distribuire tutte le 100 caramelle ai suoi 4 figli, contando ovviamente anche quelli (ingiusti!) in cui tutte le caramelle vengono date allo stesso bimbo?
(Se il risultato fosse maggiore di 9999 si dia come risposta le sue 4 cifre più basse: migliaia, centinaia, decine ed unità)

14. Sia f una funzione definita sugli interi (anche negativi) tale che, comunque si scelgano gli interi x e y, valga la relazione:

$$f(x^2+y) = 2f(x)^2 - f(y)^2 - 2yf(x).$$

Qual è il massimo valore che può assumere la parte intera di $|f(2014)|$?

15. Posto $f(1) = 23$, per ogni $n \geq 2$ indichiamo con $f(n)$ il più piccolo numero M strettamente maggiore di $f(n-1)$ tale che la cifra delle decine di M è uguale a quella di 3^M.
Quanto vale $f(365)$?

16. Nel quadrato $ABCD$ si prende il punto P sul lato CD e il punto Q sul lato DA, distinti dai vertici, in modo che i segmenti AP e BQ si intersechino in un punto T interno al quadrato.
Trovare, in cm^2, l'area del triangolo ABT, sapendo che quella del triangolo ATQ è 14cm^2, mentre quelle dei quadrilateri $BCPT$ e $TPDQ$ sono, rispettivamente, 551cm^2 e 100cm^2.

17. Si prenda un punto P, interno al quadrato $ABCD$ in modo che $PD = 1\,\text{m}$ $PA = 2\,\text{m}$ e $PB = 3\,\text{m}$. Qual è la misura (in gradi) dell'angolo $\widehat{DPA}$.

18. Ho una scatola a forma di parallelepipedo: la sua base è un rettangolo $ABCD$ con $AB = 7$cm e $BC = 2$cm, mentre la sua altezza è 2cm. Nella scatola devo mettere 14 piccoli parallelepipedi (tutti identici tra loro e quindi indistinguibili) che misurano 2cm $\times$ 1cm $\times$ 1cm.
In quanti modi diversi posso farlo?

19. Qual è il più grande numero intero compreso tra 0 e 9999, che non è esprimibile come parte intera di $n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}$, con n intero?

20. Una pulce si muove saltando su una scacchiera 10×20 (vedi figura **1**). I salti ammessi sono solo quelli tra due caselle adiacenti, cioè aventi un lato in comune.

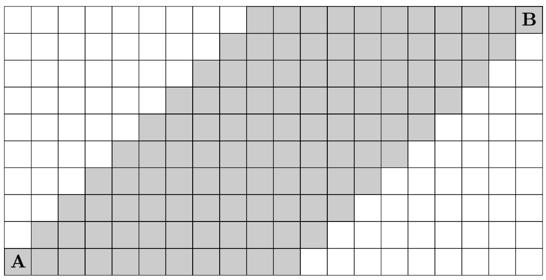

figura 1

Se la pulce parte dalla casella contrassegnata con la lettera **A**, in quanti modi diversi può arrivare alla casella contrassegnata dalla **B**, compiendo un percorso composto da 28 salti e tutto contenuto nella zona evidenziata in grigio? (se il risultato fosse maggiore di 9999 indicare come risposta le 4 cifre più basse, cioè migliaia, centinaia, decine e unità)

(a gara finita)

Informazioni Utili

- **Risultati e Statistiche:** Testo e risultati dei problemi saranno pubblicati la sera dell'**11 Aprile 2014** sulla pagina delle olimpiadi della seconda università di Roma **www.mat.uniroma2.it/~olimpiad/** e sul sito **www.problemisvolti.it**.

- **Video con gli svolgimenti:** A partire dall'**11 Aprile 2014**, a cadenza regolare (uno alla settimana), verranno via via pubblicati su **www.problemisvolti.it** i video con gli svolgimenti dettagliati dei problemi utilizzati nella gara.

- **Taranto Estate 2014 (stage estivo di matematica):** per il terzo anno consecutivo si terrà a Taranto lo **stage estivo** in preparazione alle olimpiadi della matematica del distretto di **Taranto-Brindisi**, aperto anche a eventuali studenti di altri distretti. Molto probabilmente inizierà intorno al **10 Luglio** e durerà **una settimana**. Come lo scorso anno vi saranno due sessioni parallele: **BASIC** (per chi è principiante e partecipa la prima volta) e **POST-BASIC** (per chi ha già partecipato o comunque non è un principiante).
Quest'anno alcune **novità** per favorire la partecipazione di **ragazzi da altri distretti**: la prima è che sarà garantito il **soggiorno gratuito all'accompagnatore** adulto anche nel caso di gruppi molto piccoli (5 ragazzi), la seconda è che l'accompagnatore, se vorrà, potrà certificare la **partecipazione allo stage come corso di aggiornamento**.
Lo stage terminerà con una **gara a squadre**, alla quale potranno partecipare anche gli accompagnatori.
Per maggiori dettagli, studenti e insegnanti possono contattare entro fine maggio la **prof.ssa Giuseppina Serafica**, responsabile distrettuale per le Olimpiadi della Matematica per il distretto di Taranto (Email: `giuseppina.serafica@vodafone.it`).
Inoltre, a partire da maggio, sarà disponibile una pagina con i dettagli organizzativi e il programma anche sul sito **www.problemisvolti.it**

- **Preparazione on line per il prossimo anno scolastico:** Il corso on line che è stato tenuto quest'anno sul sito **www.problemisvolti.it** rimarà ovviamente a disposizione anche negli anni a venire. Il prossimo anno, per aumentarne la fruibilità, verranno attivate, con cadenza più o meno bisettimanale, **7 gare a squadre on line** (una per ogni lezione). In tal modo, le scuole che decideranno di utilizzare il corso on line in appoggio ai propri corsi di preparazione interni, potranno sfruttare tali gare come esercitazioni su argomenti specifici. Come sempre, il sito che ospiterà le gare sarà **www.campigotto.it**, lo stesso sul quale state partecipando a questa gara.
Invito tutti i docenti interessati a registrarsi su tale sito.

Risposte

Problema 1	:	2520
Problema 2	:	12
Problema 3	:	8192
Problema 4	:	648
Problema 5	:	3333
Problema 6	:	6050
Problema 7	:	2071
Problema 8	:	5742
Problema 9	:	9376
Problema 10	:	4180
Problema 11	:	6435
Problema 12	:	9967
Problema 13	:	5526
Problema 14	:	0
Problema 15	:	3684
Problema 16	:	133
Problema 17	:	135
Problema 18	:	6272
Problema 19	:	9801
Problema 20	:	4730