Progetto Olimpiadi della Matematica

V Disfida Matematica "Urbi et Orbi"

Problemi a cura di: Emanuele Callegari, Roberto Tauraso, Vincenzo Di Gennaro, Sandro Campigotto, Roberto Peirone, Antonio Rapagnetta

1. La famiglia *Stecchino* (mamma, papà e figliolo) va in vacanza a *Grassopoli*, dove le bilance pubbliche funzionano gratis solo per pesi maggiori o uguali a 100Kg. Per pesi inferiori si paga. Decidono allora di pesarsi a coppie e trovano che:

- **a**. mamma e papà pesano insieme esattamente 132Kg;
- **b**. papà e figliolo pesano insieme esattamente 115Kg;
- **c**. mamma e figliolo, invece, insieme pesano troppo poco e la bilancia non fornisce il servizio gratis.

Allora saltano tutti e tre insieme sulla bilancia. Qual è il massimo valore intero che potrebbe comparire sul display?

2. Un'automobile col motore *Satanico* funziona nel modo seguente: quando il contachilometri segna un numero con almeno 3 cifre consecutive uguali a 6, il motore funziona in modalità *Diabolica* e risparmia 1 grammo di combustibile al chilometro. Quanti grammi di combustibile si risparmiano passando da 0 a 100000 chilometri?

3. Nelle parole **numeriRUMENI** e **ruminIMUReNE** ogni minuscola precede la corrispondente maiuscola. Sia N il numero dei loro anagrammi con la stessa proprietà. Trovare le ultime 4 cifre di N, cioè migliaia, centinaia, decine ed unità.

4. Trovare il minimo intero $n > 2015$ per il quale esiste un polinomio non costante $p(x)$ tale che $p(p(p(p(x)))) = (p(x^n))^n$.

5. Ho 10 caramelle al limone e moltissime (più di 21) alla mela. In quanti modi diversi posso dare una caramella ciascuno ai miei 21 studenti? (dare come risposta le ultime 4 cifre del risultato, cioè: migliaia, centinaia, decine ed unità)

6. Sia $\mathcal{T}$ un tetraedro regolare con volume di 7m^3 e sia $\mathcal{H}$ un ottaedro regolare la cui superficie totale è 72 volte quella di $\mathcal{T}$. Qual è (in m^3) il volume di $\mathcal{H}$?

7. Quanti termini ha il polinomio che si ottiene sviluppando $(x^7 + x^3 + 1)^{1000}$ e sommando tra loro i termini simili?

8. Dire quanti sono gli interi n tali che $1 \leq n \leq 2015$ ed aventi la rappresentazione binaria palindroma, tale cioè che, sia scorrendola da destra a sinistra sia scorrendola da sinistra a destra, si trova la stessa sequenza di cifre.

9. Un oggetto sferico, sospeso in una stanza cubica, viene tagliato in tanti pezzi usando 48 piani, ciascuno parallelo o perpendicolare al pavimento. Qual è il massimo numero di pezzi che si possono ottenere?

10. Una pulce parte dal punto $x = 2015$ sulla retta reale e fa solo salti di lunghezza 1, in avanti o all'indietro. Quando però capita su un multiplo di 6 il salto successivo può solo essere in avanti. Quante diverse sequenze di 15 salti può fare?

11. Ad una tavola rotonda, con 22 posti, si siedono 22 uomini, tutti con età diverse, in modo che almeno due di essi siano più anziani di entrambi gli uomini che gli siedono vicino. Sia N il numero di modi diversi in cui possono farlo, considerando però identici due modi che si possono ottenere uno dall'altro con una rotazione. Trovare le 4 cifre più basse di N, cioè migliaia, centinaia, decine ed unità.

12. Un cubo $ABCDEFGH$ è stato diviso in 8 parallelepipedi tagliandolo con 3 piani mutuamente perpendicolari. I volumi dei due parallelepipedi evidenziati in fig. **1** sono rispettivamente 36m^3 e 100m^3. I volumi di quelli evidenziati in fig. **2** sono rispettivamente 225m^3 e 900m^3. Trovare, espresso in m^3, il volume del cubo.

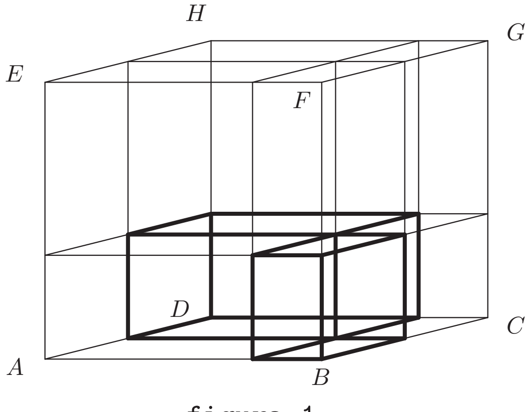

figura 1

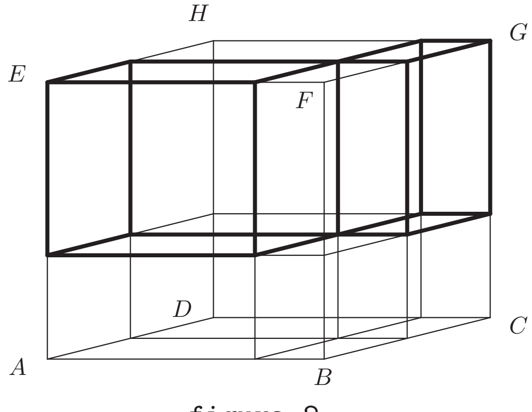

figura 2

13. Trovare N_4, dove N_0, N_1, N_2, ..., N_{10} sono dei numeri interi tali che valga l'identità:

$$x^{20} + y^{20} = N_0(x+y)^{20} + N_1xy(x+y)^{18} + N_2x^2y^2(x+y)^{16} + \ldots + N_9x^9y^9(x+y)^2 + N_{10}x^{10}y^{10}.$$

14. Partendo da una frazione positiva p/q ridotta ai minimi termini, Claudia e Luca, a turno e iniziando da Claudia, eseguono, a loro scelta, una delle due seguenti mosse:

a. sottrarre 1 al numeratore, se questo è maggiore di 1, e semplificare la frazione ottenuta;
b. sottrarre 1 al denominatore, se questo è maggiore di 1, e semplificare la frazione ottenuta.

Perde chi non può più muovere, cioè chi si trova ad operare sulla frazione $1/1$. Quante sono le frazioni ridotte ai minimi termini p/q, con $1 \leq p < q \leq 9$, tali che, partendo da esse, Claudia può sempre vincere, qualsiasi strategia adotti Luca.

15. Sono date due sfere identiche $\mathcal{S}_1$ e $\mathcal{S}_2$, tangenti esternamente tra loro e ad altre n sferette più piccole $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, ..., $\mathbf{s}_n$, anche queste tutte identiche tra loro. Sappiamo inoltre che:

a. $\mathbf{s}_1$ e $\mathbf{s}_n$ sono tangenti esternamente;
b. $\mathbf{s}_i$ e $\mathbf{s}_{i+1}$ sono tangenti esternamente, per ogni $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Qual è il minimo n per il quale esiste una sfera $\mathcal{S}$, a cui $\mathcal{S}_1$ ed $\mathcal{S}_2$ sono tangenti internamente e che contenga anche tutte le sferette $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, ..., $\mathbf{s}_n$.

16. Per ogni coppia (m,n) con m ed n interi non negativi, definiamo $f(m,n)$ attraverso le regole seguenti:

a. $f(0,k) = f(k,0) = (k+1)^2$, per ogni k intero non negativo;
b. $f(m+1,n+1) = f(m,n+1) + f(m+1,n)$, per tutti gli m e n interi non negativi.

Trovare le 4 cifre più basse di $f(10,10)$, cioè migliaia, centinaia, decine ed unità.

17. Sia $\mathcal{C}$ un cubo di volume 8208m^3 e sia r una retta che passa per il suo centro e per uno dei suoi vertici. Detto $\mathcal{K}$ il cubo simmetrico di $\mathcal{C}$ rispetto a r, calcolare (in m^3) il volume di $\mathcal{C} \cap \mathcal{K}$.

18. Il triangolo ABC è diviso in 7 regioni dai segmenti AM, BN e CO (vedi figura **3**). Per 4 di tali regioni è nota l'area e il suo valore, espresso in m^2, è riportato nella figura. Qual è, espressa in m^2, l'area di tutto il triangolo ABC?

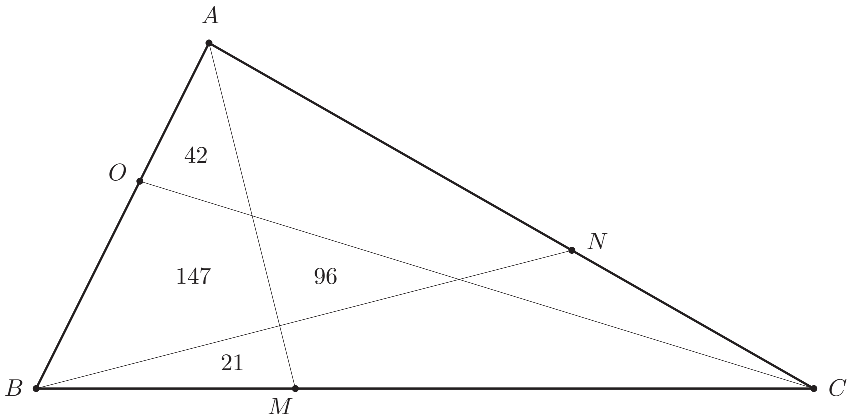

figura 3

19. Un **polimino** è una figura piana connessa (cioè *"tutta unita"*, senza pezzi staccati), ottenuta unendo un numero finito di quadrati di lato unitario in modo che ogni quadrato abbia almeno un intero lato in comune con un altro quadrato. Tra i polimini di area 4 quelli di perimetro massimo a meno di traslazioni, rotazioni e riflessioni sono i seguenti:

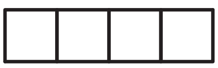

figura 4

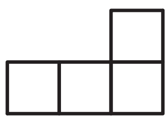

figura 5

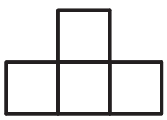

figura 6

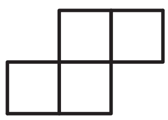

figura 7

Tra i polimini di area 6, quanti sono quelli di perimetro massimo a meno di traslazioni, rotazioni e riflessioni?

20. Una pulce salta tra le caselle di una scacchiera 3×22, cioè composta da 3 righe di 22 caselle. Può saltare solo tra caselle contigue, cioè aventi un lato in comune. Quante sono le diverse sequenze di salti che partono dalla prima casella della prima riga e terminano nell'ottava casella della terza riga, dopo aver toccato tutte le altre caselle una e una sola volta?

(a gara finita)

Informazioni Utili

- **Risultati, Statistiche e Video con i problemi risolti:** I risultati dei problemi, le statistiche della gara e i video con gli svolgimenti dettagliati di alcuni problemi saranno pubblicati la sera del **20 Aprile 2015** su **www.problemisvolti.it**.

Risposte dei Problemi

	risultato
Problema 1 :	173
Problema 2 :	280
Problema 3 :	4400
Problema 4 :	2197
Problema 5 :	8576
Problema 6 :	6048
Problema 7 :	6986
Problema 8 :	93
Problema 9 :	8993
Problema 10 :	9232
Problema 11 :	1424
Problema 12 :	2431
Problema 13 :	2275
Problema 14 :	18
Problema 15 :	6
Problema 16 :	6396
Problema 17 :	6156
Problema 18 :	630
Problema 19 :	27
Problema 20 :	6144