Progetto Olimpiadi della Matematica

VI Disfida Matematica "Urbi et Orbi"

Problemi a cura di (in ordine alfabetico): Emanuele Callegari, Sandro Campigotto, Roberto Tauraso, Stefano Viaggiu.

1. Trovare il più piccolo tra i divisori di 9006000 che superano la sua radice quadrata.

2. Sia $p(x)$ un polinomio. Se il grafico di $y = p(x)$ interseca quello della retta $y = x$ esattamente in 17 punti, qual è il minimo grado che può avere il polinomio $p(x)$?

3. Nella botte **A** ci sono 2016 litri di vino mentre nella botte **B** ci sono 2016 litri d'acqua. Prendiamo n litri di vino dalla botte **A** (con n intero positivo) e li versiamo nella botte **B**, mescoliamo, dopodiché prendiamo lo stesso numero n di litri dalla miscela ottenuta nella botte **B** e li riversiamo nella botte **A**.
Qual è il minimo valore di n che ci fa ottenere, nella botte **A**, una miscela in cui l'acqua è almeno un terzo del totale?

4. Un bastone lungo 2016 millimetri viene spezzato in 63 pezzi più piccoli, le cui lunghezze sono in progressione aritmetica. Se la più grande è 63 volte la più piccola, quanto misura (in millimetri) la più grande?

5. Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $n!$ termina esattamente con 1000 zeri. (se non esiste indicare come risposta 9999).

6. Un giocatore accanito crede che per aumentare le probabilità di vincita alla roulette deve puntare su 3 numeri distinti il cui prodotto sia divisibile per 8. In quanti modi il giocatore può scegliere i 3 numeri? (i numeri sulla roulette classica sono 37 e vanno da 0 a 36)

7. Sull'isola *Kenoncè* è scoppiata un'epidemia di *Sincerite*. Si tratta di una malattia molto grave: dopo un lungo periodo di apparente normalità, il malato diventa improvvisamente incapace di mentire. Per isolare in tempo i cittadini infetti, il ministero della salute ha messo a punto un test rapido molto affidabile: ogni 100 persone infette sottoposte al test, una sola viene identificata erroneamente come sana, analogamente ogni 100 persone sane sottoposte al test, una sola viene identificata erroneamente come malata.
Esaminata tutta lo popolazione (esattamente 1 milione di persone) i cittadini risultati positivi al test sono 10147.
Quanti sono i cittadini realmente infetti? (se si ritiene siano più di 9999 dare come risposta 9999)

8. Nel trapezio $ABCD$ le basi AB e CD misurano rispettivamente 89 e 14, mentre il lato obliquo AD misura 199. Sappiamo inoltre che esiste un punto P sulla base AB tale che, detto $Q = PC \cap DB$, le aree dei triangoli APQ e CQB sono entrambe uguali a 1050. Qual è l'area di $ABCD$?

9. In quanti modi diversi si può tassellare una striscia di 10 quadrati (vedi figura **1**) usando quadrati di colore bianco o nero e rettangoli di colore grigio formati unendo due quadrati?

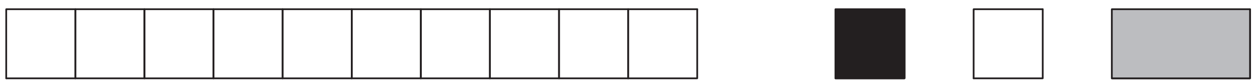

figura 1

10. Nel piano cartesiano Oxy si prendano $A \equiv (1800, 1440)$, $B \equiv (720, 450)$ e $C \equiv (3600, 540)$. Determinare un punto $P \equiv (x, y)$, interno al triangolo ABC, in modo che le aree dei triangoli PBC, PCA e PAB, stiano tra loro nello stesso rapporto di 9, 1 e 5, in quest'ordine. Dare come risposta $x + y$.

11. Claudia e Luca si sfidano a **Spezza e Brucia**. Le regole del gioco sono le seguenti:

(**a**) si comincia mettendo sul tavolo un bastone di lunghezza intera strettamente positiva;

(**b**) a turno, ciascun giocatore prende il bastone dal tavolo e lo spezza in 2 parti di lunghezza intera strettamente positiva in modo che la differenza tra le lunghezze dei due pezzi sia 0 o 1, poi butta nel fuoco una delle 2 parti e rimette l'altra sul tavolo;

(**c**) perde chi non ha più mosse da poter fare, cosa che accade non appena il bastone sul tavolo ha lunghezza 1.

Ad un certo punto, mentre tocca a Claudia, sul tavolo c'è un bastone la cui lunghezza è un numero di 4 cifre, e Luca si rende conto che, qualsiasi mossa farà Claudia, egli sarà in grado (dopo un po' di turni) di vincere.
Qual è la massima lunghezza che può avere il bastone?

12. Dato nel piano cartesiano il pentagono $ABCDE$, siano $P \equiv (-21, 26)$, $Q \equiv (-42, -65)$, $R \equiv (7, -52)$, $S \equiv (49, 13)$ e $T \equiv (35, 78)$ rispettivamente i punti medi di AB, BC, CD, DE ed EA. Trovare la somma delle coordinate di A.

13. In figura **2** il lato più corto del rettangolo misura 66, mentre i 3 cerchi hanno raggio 15. Qual è la somma delle aree dei due triangoli ombreggiati?

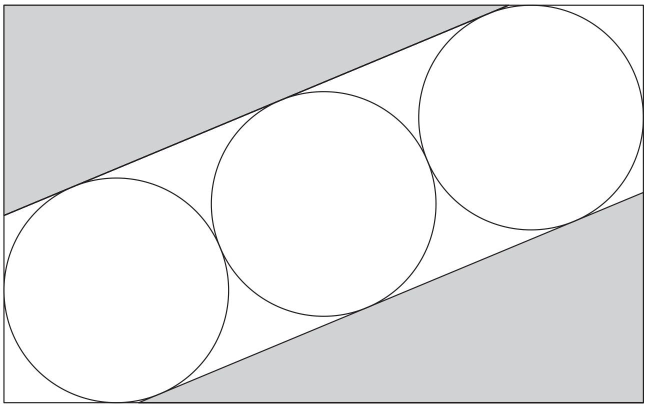

figura 2

14. Un poligono regolare di 9797 lati ha, ovviamente, 9797 assi di simmetria. Se immaginiamo di colorare ciascun lato di bianco o di nero (ma non tutti i lati dello stesso colore), quanti sono, al massimo, gli assi di simmetria del poligono che sono di simmetria anche per la colorazione?

15. Determinare il più piccolo intero positivo n tale che $529n + 1$ e $528n + 1$ sono entrambi dei quadrati perfetti.

16. Claudia ha 102 mattoncini Lego, ciascuno contrassegnato con un numero intero diverso, compreso tra 1 e 102. Con essi vuole costruire un blocco di 34 strati (3 mattoncini per strato), analogo a quelli rappresentati in figura **3**, dove vediamo 3 blocchi costituiti, rispettivamente, da 1, 2 e 8 strati. Però Claudia vuole anche che ciascun mattoncino sia contrassegnato da un numero maggiore di quelli dei due mattoncini sui quali poggia. In quanti modi diversi può essere fatto il blocco? (Dare come risposta le 4 cifre meno significative del risultato, cioè migliaia, centinaia, decine ed unità)

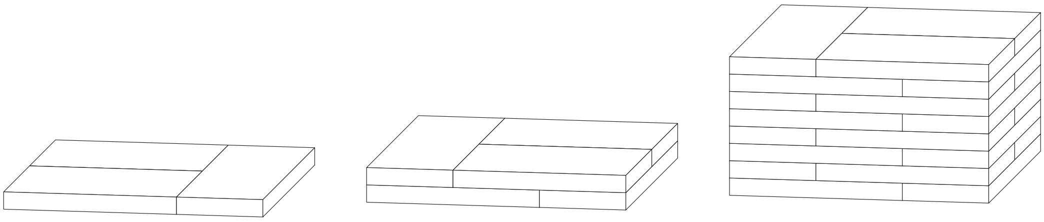

figura 3

17. Dire quante sono le permutazioni $(a_1, a_2, \ldots, a_{13})$ dei numeri interi da 1 a 13 tali che $a_i < a_{2i}$ e $a_i < a_{2i+1}$ per ogni $i = 1, \ldots, 6$. Se il risultato ha più di 4 cifre, dare come risposta le 4 cifre finali, cioè migliaia, centinaia, decine ed unità.

18. Una pulce salta nel piano cartesiano. Diremo che un salto è **buono** se, partendo dal punto (x, y), termina in un punto del tipo $(x + s, y)$ o $(x, y + s)$, dove $s \in \{1, 3, 5, 11, 23, 47, 91, 2016\}$. Dire quanti sono i percorsi che partono dall'origine, costituiti da 8 salti buoni di lunghezze tutte diverse e che non scavalcano mai la retta $y = x$. Dare come risposta le 4 cifre meno significative del risultato, cioè migliaia, centinaia, decine ed unità.

19. In un triangolo ABC con lati $AB = 52$, $BC = 60$ e $CA = 56$, sia P un punto sul lato BC tale che il cerchio inscritto nel triangolo ABP ha lo stesso raggio di quello inscritto nel triangolo ACP. Trovare il quadrato della lunghezza di AP.

20. Un cubo di vertici $ABCDEFGH$ ha volume 10125. Sia $\mathcal{P}$ la piramide avente per base la faccia $ABCD$ e per vertice il centro della faccia opposta del cubo. Analogamente sia $\mathcal{Q}$ la piramide (identica a $\mathcal{P}$) che ha per base la faccia $ABFE$ e il vertice nel centro della faccia opposta del cubo. Trovare il volume di $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

(a gara finita)

Informazioni Utili

- Risultati, Statistiche e Video con i problemi risolti: I risultati dei problemi, le statistiche della gara e i video con gli svolgimenti dettagliati di alcuni problemi saranno pubblicati questa sera stessa **18 Aprile 2016** su **www.problemisvolti.it**.

- Call for Problems/Help: In vista di un *"miglioramento (ampliamento?) del servizio"* per il 2017, cerchiamo fin da ora collaboratori che ci aiutino ad inventare e/o controllare i problemi per le gare. Contattare Emanuele Callegari: callegar@mat.uniroma2.it

Risposte date ai Problemi

		risultato
Problema 1	:	3002
Problema 2	:	17
Problema 3	:	1008
Problema 4	:	63
Problema 5	:	4005
Problema 6	:	4164
Problema 7	:	150
Problema 8	:	9167
Problema 9	:	5741
Problema 10	:	3402
Problema 11	:	6826
Problema 12	:	118
Problema 13	:	2523
Problema 14	:	101
Problema 15	:	8456
Problema 16	:	6128
Problema 17	:	6880
Problema 18	:	4050
Problema 19	:	2016
Problema 20	:	1380