Roma, 10 Aprile 2017 - Università di Roma Tor Vergata

Progetto Olimpiadi della Matematica

VII Disfida Matematica "Urbi et Orbi"

Problemi a cura di (in ordine alfabetico): E. Callegari, L. Ferrigno, G. Marini, R. Peirone, A. Rapagnetta, A. Sgueglia, R. Tauraso, R. Vacca.

1. Il numero intero positivo n, quando è rappresentato in base 3, ha 400 cifre che si ripetono a gruppi di 4 nel modo seguente:

$$n = \overbrace{\overbrace{2011}\,\overbrace{2011}\,\overbrace{2011}\ldots\overbrace{2011}}^{100}$$

Quali sono le quattro cifre meno significative della sua rappresentazione in base 9?

2. In un parallelepipedo rettangolo, una faccia ha area 40, un'altra ha area 105 e un'altra ancora ha area 168. Qual è il suo volume?

3. La *Terra Infinita* è composta da un'unica grande pianura sulla quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali con origine nel dipartimento di Matematica. Le strade che solcano la pianura sono tutte e sole le rette parallele a uno dei due assi e distanti da esso un numero intero di chilometri.
La **distanza stradale** tra due punti della rete stradale è la lunghezza del minimo tragitto di strada che li congiunge.
Luca sa che il dipartimento di Economia si trova nell'incrocio di coordinate $(15, 16)$ e che l'appartamento di Claudia ha distanza stradale di $17,5\,\mathrm{Km}$ dal dipartimento di Matematica e di $16,5\,\mathrm{Km}$ da quello di Economia.
Sulla base di queste sole informazioni, quanti sono i diversi punti della rete stradale in cui potrebbe essere situato l'appartamento di Claudia.
(Se si ritiene che siano infiniti dare come risposta 9999)

4. Dire quanti sono i triangoli isosceli acutangoli con lati interi e perimetro 2017.

5. Sappiamo che $\mathrm{MCD}(m, n, k) = 1122332211^2$ e che $\mathrm{mcm}(m, n, k) = 1122332211^3$, dove m, n e k sono interi positivi. Quanti valori diversi può assumere il prodotto $m \cdot n \cdot k$?

6. Un triangolo ABC, rettangolo in B, ha i cateti che misurano $AB = 60$ e $BC = 80$. Un secondo triangolo, identico ad ABC, è messo in modo da avere il vertice con l'angolo retto in A e l'ipotenusa parallela ad AB. Sapendo che l'intersezione tra i due triangoli ha area non nulla, dire qual è quest'area.

7. Quanti sono i triangoli rettangoli di lati interi tali che il diametro della circonferenza inscritta è uguale a 600?

8. Le tre altezze del triangolo ABC misurano $840\,\mathrm{mm}$, $728\,\mathrm{mm}$ e $780\,\mathrm{mm}$. Trovare la sua area espressa in cm^2.

9. Determinare il più piccolo numero intero positivo n tale che $\sqrt{n(n + 2017)}$ è un numero intero. (Se n ha più di 4 cifre, indicare come risposta le 4 cifre meno significative, cioè migliaia, centinaia, decine ed unità)

10. Sia ABC un triangolo isoscele sulla base BC e tale che i piedi delle bisettrici uscenti da B e C siano allineati con il circocentro del triangolo. Sapendo che la circonferenza circoscritta ha raggio $r = 42$, trovare il quadrato dell'altezza h relativa alla base BC.

11. Sull'isola di *Kenoncè* i distributori di caramelle hanno due pulsanti: se si preme il primo pulsante esce un numero fissato x di caramelle mentre se si preme il secondo ne esce un numero fissato y. Leo va con 10 suoi amici, preme 3 volte il primo pulsante e 7 volte il secondo, e poi prova a dividere le caramelle in 11 parti uguali, ma non ci riesce perché ne restano 9. Arrivano altri due amici, e decidono di premere entrambi i pulsanti altre due volte, sperando che aggiungendo le nuove caramelle a tutto il mucchio precedente si riesca a dividerle in parti uguali tra 13 persone, ma anche questa volta non ci riescono perché gliene restano 2.
Trovare tutte le possibili coppie (x, y), che soddisfano le ulteriori condizioni $0 < x \leq 75$ e $0 < y \leq 100$.
Dare come risposta il numero che si ottiene aggiungendo alla somma di tutti i possibili y il doppio della somma di tutti i possibili x.

12. Il garage di Gianni è un enorme stanzone con 22 colonne, nessuna finestra ed un'unica porta di accesso. Internamente, è stato completamente piastrellato (pareti, colonne, pavimento e soffitto). Le piastrelle usate sono poligoni irregolari con un numero arbitrario di lati. Due piastrelle possono essere confinanti in un vertice, lungo un intero lato o non confinare affatto. Dopo la piastrellatura si possono contare L lati e V vertici (si contano anche i lati adiacenti alla porta d'accesso al garage; un lato comune a due piastrelle, come pure un vertice comune a più piastrelle, si conterà una volta sola). Sapendo che i lati sono 759 più dei vertici, dire quante piastrelle sono state utilizzate.

13. Sia $n = (p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_{10})^{2017}$ dove $p_1, p_2, p_3, \ldots p_{10}$ sono numeri primi distinti. Inoltre sia $\mathcal{D}$ l'insieme di tutti i divisori positivi di n, compresi 1 ed n, e sia $\mathcal{J}$ un sottoinsieme di $\mathcal{D}$ tale che, comunque si prendano due elementi distinti di $\mathcal{J}$, il loro prodotto non è mai un quadrato perfetto.
Qual è il massimo numero di elementi che può avere $\mathcal{J}$?

14. Trovare tutte le terne (p, q, n), con p e q numeri primi e n intero positivo, che soddisfano la seguente equazione:

$$p(p+1)+q(q+1)=n(n+1)$$

Indicate tali terne con (p_1, q_1, n_1), (p_2, q_2, n_2), $\ldots$, (p_k, q_k, n_k) dare come risposta $p_1 \cdot q_1 \cdot n_1 + p_2 \cdot q_2 \cdot n_2 + \ldots + p_k \cdot q_k \cdot n_k$. (Se non ci sono soluzioni allora dare come risposta 0, se le soluzioni sono infinite dare come risposta 9999 e se la somma richiesta fosse maggiore di 9999, dare come risposta le quattro cifre meno significative del risultato)

15. Sia dato nel piano un quadrilatero convesso $ABCD$ tale che ciascuna diagonale lo divide in due parti, una di area 432 e l'altra di area 576. Sia $\mathcal{S}$ il luogo dei punti P del piano tale che la somma delle aree dei triangoli APB, BPC, CPD e DPA non superi il triplo dell'area di $ABCD$. Qual è l'area di $\mathcal{S}$? (se la risposta ha più di 4 cifre indicare solo le 4 meno significative)

16. Quanti sono i sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ che contengono una e una sola coppia di numeri interi consecutivi?

17. Dire quanti sono gli anagrammi di **AAABBBAAABBB** tali che, comunque li si spezzi in due, in ciascuno dei due pezzi la differenza tra il numero di lettere **A** e il numero di lettere **B** non è mai maggiore di 2.

18. Dire quante sono le terne (A, B, C) dove A, B, C sono sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ tali che $A \cap B$, $B \cap C$, e $C \cap A$ non sono vuoti ma $A \cap B \cap C$ è vuoto. (Ricordare che le terne sono insiemi *ordinati*: ad esempio se $A \neq B$, le terne (A, B, C) e (B, A, C) sono da considerarsi diverse)

19. Dire in quanti modi diversi la coppia $(2017, 2)$ può essere scritta come somma di una o più coppie di numeri interi non negativi e non entrambi nulli, tenendo conto anche dell'ordine degli addendi. Ad esempio $(2000, 1) + (10, 1) + (7, 0) = (2017, 2)$ e $(10, 1) + (2000, 1) + (7, 0) = (2017, 2)$ vanno considerate diverse.
(Si ricorda che la somma di due coppie (a, b) e (c, d) è la coppia $(a + c, b + d)$. Si ricorda inoltre che se il risultato del problema ha più di 4 cifre bisogna indicare come risposta le 4 cifre meno significative)

20. Sia $\mathcal{S}$ la superficie che si ottiene ruotando l'iperbole $y^2 = x^2 + 1$ attorno all'asse x. Prese quattro rette r, s, t ed ℓ, a due a due sghembe, e tali che r, s, t sono interamente contenute in $\mathcal{S}$, mentre ℓ no, dire quante sono, al massimo, le rette che le intersecano tutte e quattro.

(a gara finita)

Informazioni Utili

- `Risultati, Statistiche e Video con i problemi risolti:` I risultati dei problemi, le statistiche della gara e i video con gli svolgimenti dettagliati di alcuni problemi saranno pubblicati questa sera stessa **10 Aprile 2017** su **www.problemisvolti.it**.

- `Call for Problems/Help:` Quest'anno il gruppo di persone che ha lavorato alla preparazione del testo si è ulteriormente ampliata, come potete vedere nella lista dell'intestazione, contribuendo a rendere più vario e più sicuro il testo. In vista di un ulteriore *"miglioramento (ampliamento?) del servizio"* per il 2018, cerchiamo fin da ora collaboratori che vogliano aggiungersi al nostro gruppo e che ci aiutino ad inventare e/o controllare i problemi per le gare.
  Gli interessati contattino Emanuele Callegari: `callegar@mat.uniroma2.it`

Risposte dei Problemi

Problema 1	:	6464
Problema 2	:	840
Problema 3	:	5
Problema 4	:	418
Problema 5	:	162
Problema 6	:	666
Problema 7	:	45
Problema 8	:	3549
Problema 9	:	6064
Problema 10	:	5292
Problema 11	:	7462
Problema 12	:	716
Problema 13	:	1024
Problema 14	:	192
Problema 15	:	6961
Problema 16	:	235
Problema 17	:	486
Problema 18	:	1830
Problema 19	:	7488
Problema 20	:	2