Firenze, 14 Aprile 2018

European Girls' Mathematical Olympiad

VIII Disfida Matematica "Urbi et Orbi"

A cura di (in ordine alfabetico): F.Ballini, E.Callegari, L.Ferrigno, G.Marini, P.Perfetti, A.Sgueglia, R.Tauraso, R.Vacca, A.Veronese.

1. Quanti sono i numeri interi n, con $9500 \leq n \leq 9700$, che sono primi con 9595?

2. Siano p e q numeri primi tali che $pq = 11663$. Determinare $p + q$.

3. Si scrive la lista, in ordine crescente, di tutti i divisori positivi di 720^2, compresi 1 e 720^2. Trovare il 68-esimo numero della lista.

4. Considerate l'insieme dei numeri interi positivi che sono una potenza di 7 oppure una somma di potenze di 7 a due a due distinte. Scrivete poi tali numeri in ordine crescente. La lista allora comincerà con 1, 7, 8, 49, 50, 56, ... Quali sono le ultime 4 cifre del 49-esimo numero?

5. Determinare il più piccolo numero intero positivo tale che il prodotto di tutti i suoi divisori positivi è uguale 72^{35}.

6. L'area di un triangolo ABC è un numero intero di 4 cifre, inoltre l'altezza condotta dal vertice A misura 99 e quella condotta da B misura 101. Quanti diversi valori può assumere l'area di ABC?

7. Sia dato il triangolo ABC con $AB = 50$ e $BC = AC = 2018$. Siano P e Q punti del lato AC tali che la circonferenza inscritta è tangente in P e quella exinscritta è tangente in Q. Quanto misura il segmento PQ?

8. Un numero x si può esprimere come somma di potenze 2017-esime dispari, a due a due distinte. Quanti valori diversi può assumere il resto della divisione di x per 2018 al variare di tali x?

9. Nel gioco della volpe ci sono due sacchi di monete, il primo con 7395 monete, il secondo con 6503 monete. Le mosse consentite sono:

mossa $m = 1$: prendere a monete dal primo sacco, con $1 \leq a \leq 18$,

mossa $m = 2$: prendere b monete dal secondo sacco, con $1 \leq b \leq 30$,

Due giocatori, a turno, fanno la loro mossa. Perde chi toglie l'ultima moneta. Per il giocatore che deve muovere, una mossa volpe è la mossa di una strategia che dà la certezza della vittoria, il corrispondente numero volpe è il numero $100m + t$, dove m denota il numero della mossa (1 o 2) e t denota il numero delle monete da togliere. Scrivere la somma dei numeri volpe della posizione iniziale. (Se si ritiene che non sia il giocatore che inizia ad avere in mano la vittoria la risposta da dare è 0).

10. Nel triangolo ABC le altezze condotte dai punti A, B e C misurano rispettivamente 63, 28 e 27. Un punto P, interno al triangolo, dista 6 dal lato AB e 4 dal lato AC. Quanto dista dal lato BC?

11. Determinare il numero di coppie ordinate di interi positivi (x, y) tali che:

$$xy + 3 \cdot \mathrm{mcm}(x, y) = 2018 + 6 \cdot \mathrm{MCD}(x, y).$$

12. Per decidere che film andare a vedere, Marco e Claudia fanno il seguente gioco: mettono in un'urna 673 palline bianche e 672 palline nere, ne estraggono una e, se questa è bianca, vince Claudia, altrimenti vince Marco. Tuttavia Marco, pensando che il gioco non sia equo, toglie a caso 5 palline dall'urna, senza guardarle e solo dopo estraggono la pallina per guardarne il colore e decidere chi vince. Trovare la probabilità che ora Claudia vinca.
Dare come risposta la somma del numeratore e del denominatore della frazione ottenuta e ridotta ai minimi termini.

13. Per quanti interi positivi k di 4 cifre esiste un polinomio P a coefficienti interi tale che $P(1) = 11$ e $P(12) = k$?

14. Trovare il più grande intero n tale che la disuguaglianza $x^{7x} \leq x^n + 1 - x$ sia vera per ogni $0 < x \leq 1$.

15. Quante sono le quaterne (a, b, c, d) di interi non negativi e non maggiori di 100 tali che $\max\{a, b\} \leq \max\{c, d\}$ e $\max\{a, c\} \leq \max\{b, d\}$? (Se il risultato ha più di 4 cifre, indicare le 4 cifre più basse)

16. Nel triangolo ABC, di area 5040 e con $AC > AB$, si traccia la bisettrice AM e la mediana AN. Sapendo che $AM = 70$ e che il triangolo AMN ha area 840, dire quanto misura la mediana condotta dal punto B.

17. Un polinomio di settimo grado P è tale che $P(x) - 32$ è divisibile per $(x+1)^4$ e $P(x) + 32$ è divisibile per $(x-1)^4$. Quanto vale $P(2)$?

18. Una sestupla $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6)$ di numeri interi si dice esagonale se esiste un esagono con angoli interni tutti uguali a 120° e con le lunghezze dei lati, in ordine orario, rispettivamente n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6. Quante sono le sestuple esagonali tali che il perimetro di ognuno dei corrispondenti esagoni è uguale a 15?

19. Un pallone da calcio, ossia un icosaedro troncato, ha tutti i 12 pentagoni colorati di nero mentre i 20 esagoni sono rossi oppure blu. Quanti esagoni, al massimo, possono essere colorati di blu se si vuole che non ci siano due esagoni blu con un lato in comune? (un icosaedro troncato è un solido archimedeo di 32 facce di cui 20 sono esagoni regolari e 12 sono pentagoni regolari)

20. Il rettangolo 2×10 in figura **1** viene ricoperto esattamente, senza sovrapposizioni, da 5 rettangoli di lati interi. Un esempio di ricoprimento ammissibile è riportato in figura **2**.
In quanti modi diversi si può fare questa suddivisione?

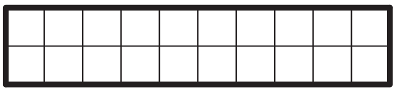

figura 1

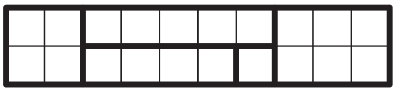

figura 2

21. Sia $ABCD$ un quadrilatero ciclico e con le diagonali perpendicolari che si incontrano in M tale che $AB = 51$, $CD = 68$ e $DA = 75$. Dette P, Q, R, e S le proiezioni di M rispettivamente su DA, AB, BC, e CD, trovare l'area di $PQRS$. (Dare come risposta le ultime 4 cifre della somma tra numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.)

22. Sia $\mathcal{S}$ l'insieme degli interi positivi la cui scrittura in base 3 ha al massimo 2018 cifre e contiene solo zeri e uni. Determinare il minimo intero k che non viene superato dalla somma:

$$720 \cdot \sum_{n \in \mathcal{S}} \frac{3n+2}{n(3n+1)}.$$

23. In un triangolo ABC, sia DEF il triangolo individuato dalla proiezione del baricentro G sui lati del triangolo. Determinare il rapporto tra l'area del triangolo DEF e l'area del triangolo ABC nel caso in cui i lati di ABC misurino 3, 5 e 7. Dare come risposta la somma del numeratore e del denominatore della frazione ottenuta e ridotta ai minimi termini.

24. In un triangolo scaleno con lati di lunghezza intera a, b e c si ha che $a^2 + b^2 + c^2 = 2018$. Quanto vale il perimetro?

(a gara finita)

Informazioni Utili

- **Risultati, Statistiche e Video con i problemi risolti:** I risultati dei problemi, le statistiche della gara e alcuni video con gli svolgimenti dettagliati di alcuni problemi saranno pubblicati la sera del **16 Aprile 2018** su **www.problemisvolti.it**.

- **Call for Problems/Help:** Quest'anno il gruppo di persone che ha lavorato alla preparazione del testo si è ulteriormente ampliato, come potete vedere nella lista dell'intestazione, contribuendo a rendere più vario e più sicuro il testo. In vista di un ulteriore *"miglioramento (ampliamento?) del servizio"* per il 2019, cerchiamo fin da ora collaboratori che vogliano aggiungersi al nostro gruppo e che ci aiutino ad inventare e/o controllare e/o tradurre i problemi per le gare.
Gli interessati contattino Emanuele Callegari: callegar@mat.uniroma2.it

Risposte ai problemi

Problema 1	:	151
Problema 2	:	216
Problema 3	:	720
Problema 4	:	9209
Problema 5	:	5184
Problema 6	:	5000
Problema 7	:	1968
Problema 8	:	2018
Problema 9	:	220
Problema 10	:	40
Problema 11	:	12
Problema 12	:	2018
Problema 13	:	819
Problema 14	:	8
Problema 15	:	6201
Problema 16	:	96
Problema 17	:	356
Problema 18	:	22
Problema 19	:	8
Problema 20	:	2562
Problema 21	:	4229
Problema 22	:	2160
Problema 23	:	671
Problema 24	:	76