Roma, 8 Aprile 2019 - Università di Roma Tor Vergata

Progetto Olimpiadi della Matematica

IX Disfida Matematica "Urbi et Orbi"

Problemi a cura di (in ordine alfabetico): E. Callegari, L. Ferrigno, G. Marini, P. Perfetti, A. Rapagnetta, A. Sgueglia, R. Tauraso, R. Vacca.

1. Se si mettono in ordine alfabetico tutti gli anagrammi di **TACER**, in posizione 1 troviamo **ACERT**. In che posizione si trova **TACER**?

2. I 12 spigoli di un parallelepipedo hanno misura intera. Sapendo che la loro somma non supera 100, qual è il massimo volume che può avere il parallelepipedo?

3. Calcolare la somma di tutti i divisori dispari di 8100 (tra i divisori va considerato anche 1).

4. Si considerino tutti i numeri di 5 cifre ottenuti permutando le cifre del numero 55422: alcuni sono divisibili per 15, altri no. Detta S la somma di quelli che sono divisibili per 15, dire quanto vale $\frac{S}{450}$.

5. Determinare il resto che si ottiene dividendo per 2019 il numero $201\underbrace{99\ldots99}_{2019}$.

6. Due delle soluzioni dell'equazione $4x^3 - 72x^2 + 419x - 792 = 0$ hanno differenza 1. Qual è la loro somma?

7. Sommando i numeri interi da 1 a n e togliendo dal totale ottenuto due numeri interi a e b con $1 \leq a < b \leq n$ si ottiene 2019. Determinare la somma di tutti i possibili numeri b.

8. Calcolare $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{50}$, dove x_n è definito ricorsivamente ponendo $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = \frac{n}{n+2} \cdot x_n$ per $n = 1, 2, \ldots, 49$. Il risultato è della forma $\frac{p}{q}$, con p e q interi positivi e primi tra loro: dare come risposta $p \cdot q$.

9. Dato un prisma esagonale regolare, con lato di base e altezza 10, sia $\mathcal{L}$ il luogo dei punti esterni al prisma che abbiano distanza dalla sua superficie pari esattamente a 1. Trovare l'area della superficie $\mathcal{L}$ (essa è della forma $a + b\sqrt{3} + c\pi$, con a, b e c interi: dare come risposta $a + b + c$).

10. Nel triangolo ABC si prendono P e Q sul lato AB ed S e T sul lato AC in modo che: $AP = PQ = QB = 30$ e $AS = ST = TC = 40$. Sapendo che l'intersezione dei triangoli PTB e CQS ha area 640, dire quanto dista B dalla retta AC.

11. Dato il triangolo equilatero ABC di lato 100, lo si divide in 10000 triangolini equilateri di lato 1 con i lati paralleli ai lati di ABC. Poi si iniziano a riempire i triangolini con i numeri 0, 1, 2, ..., n in modo tale che numeri consecutivi siano scritti in triangolini con un lato in comune. Qual è il più grande valore possibile per n?

12. Sia $P(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b e c interi relativi. Se $P(b) = a$ e $P(a) = b$ allora quanto vale al massimo la differenza $b - a$?

13. Dire quante sono le terne ordinate di numeri interi (a, b, c), con $1 \leq a, b, c \leq 30$ tali che

$$\mathrm{MCD}(a, b, c) \cdot \mathrm{mcm}(a, b, c) = \sqrt{abc}$$

14. Nel triangolo ABC, AB è il lato maggiore. La bisettrice dell'angolo A divide il triangolo in due parti di aree 200 e 220 mentre quella dell'angolo B lo divide in due parti di aree 231 e 189. Trovare il quadrato del lato AB. (Il risultato è del tipo $n\sqrt{2}$ con n intero: dare come risposta n)

15. Dire quante sono le coppie (m, n) di interi positivi tali che:

$$m + n = \mathrm{MCD}(m, n) + \mathrm{mcm}(m, n) = 9!.$$

16. In un triangolo ABC i lati misurano $|AB| = 62$, $|BC| = 105$ e $|AC| = 50$. Sia M il punto medio del lato AB e sia N il punto medio della mediana CM. Sia P_1 il punto medio di CN e P_2 il punto medio di NM. Siano Q_1 e Q_2, i punti di intersezione tra il segmento CB e rispettivamente le rette AP_1 e AP_2. Quanto vale la lunghezza del segmento Q_1Q_2?

17. Siano $a, b, c \geq 0$ tali che $ab + bc + ca = 27$. Trovare il minimo della espressione

$$\left(1 + a^2\right)\left(1 + b^2\right)\left(1 + c^2\right)$$

18. Sia $ABCV$ un tetraedro con la proprietà che le facce che contengono il punto V formano un angolo di $45°$ con la faccia ABC e che la proiezione ortogonale di V sul piano di ABC cada internamente al triangolo. Sapendo inoltre che $AV = \sqrt{243}$, $BV = \sqrt{594}$ e $AB = 39$ trovare il volume di $ABCV$.

19. Marco scrive su un foglio tutti i divisori di 720^2 (inclusi 1 e 720^2) e scrive a fianco ad ognuno di essi il cubo del numero dei suoi divisori. Alla fine qual è la somma di tutti i numeri scritti sul foglio? (Se la somma è maggiore di 9999, dare come risposta le ultime quattro cifre del numero)

20. Sull'isola Kenoncè il concorso per essere ammessi alla Scuola Dei Più Bravi è composto da due prove (matematica e fisica) in ciascuna delle quali si può conseguire un voto che varia da 0 a 10, non necessariamente intero. Al concorso di quest'anno hanno partecipato 8 persone: per tre di essi la media aritmetica dei due voti è 8, per altri tre la media è 6 mentre per i due rimanenti la media è 5. La commissione però si accorge che i voti sono tali che, usando la media quadratica invece della media aritmetica non ci sarebbero studenti a pari merito. In base ai soli dati noti, quante sono le possibili classifiche diverse che si potrebbero ottenere usando la media quadratica? (N.B. la media quadratica di a e b è $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$)

21. La griglia in figura è composta da 23 caselle 1×1 e viene completamente ricoperta, senza sovrapposizioni, usando tessere 1×1, 2×1 e 1×2. In quanti modi diversi si può farlo se si vuole fare in modo che le tessere di area 2 non siano mai adiacenti tra loro?

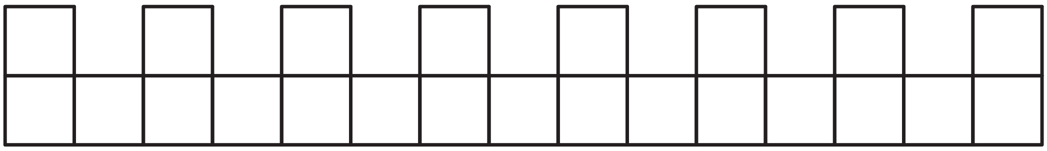

figura 1

22. In quanti modi possiamo riordinare la sequenza 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 in a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, in modo che $a_{k+1} - a_k \neq 2$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$?

23. In un rombo $ABCD$, l'angolo in B è di $42°$. Sia M il punto medio del lato BC e sia H il piede della perpendicolare condotta da A su DM. Quanto misura in gradi l'angolo $\widehat{DHC}$?

24. Nella lingua dell'isola Kenoncè l'alfabeto ha 2019 lettere e le parole del dizionario sono tutti e soli i 2019! anagrammi dell'alfabeto. L'anagramma di una parola si dice prestigioso se è possibile scrivere l'alfabeto come unione disgiunta di due sottoinsiemi ciascuno dei quali ha la seguente proprietà: le lettere che lo compongono compaiono, nella parola che si sta anagrammando, nel medesimo ordine prima e dopo l'anagramma. Qual è il minimo numero k con la proprietà che ogni parola del dizionario può essere ottenuta effettuando k anagrammi prestigiosi consecutivi a partire dall'alfabeto?

(a gara finita)

Informazioni Utili

- **Risultati e Video con i problemi risolti:** I risultati dei problemi e i video con gli svolgimenti dettagliati di alcuni problemi saranno pubblicati questa sera stessa **8 Aprile 2019** su:

  www.problemisvolti.it.

- **(Novità) Stage Urbi et Orbi:** Quest'anno la disfida Urbi et Orbi viene utilizzata come gara conclusiva dello Stage Urbi et Orbi: 10 gare a squadre a tema, fruibili da tutte le scuole d'Italia grazie al sito **phiquadro.it**. Nella zona di Roma le gare sono state precedute da lezioni specifiche di preparazione e seguite da una discussione dei problemi della gara. Testi delle gare e materiale delle lezioni sono linkati alla pagina:

  http://www.problemisvolti.it/StageOlimpiadiMatematica.html

  Hanno usufruito dello stage anche molte scuole di altri distretti (circa 50), che hanno partecipato on line alle gare e hanno gestito le lezioni di preparazione da sole o anche usando il materiale reso disponibile on line durante lo stage.
  Nel prossimo anno scolastico contiamo di ripetere l'esperienza, con aggiustamenti minimi.
  Le scuole interessate possono contattare Emanuele Callegari: callegar@mat.uniroma2.it