Università di Roma la Sapienza

Università di Roma Tor Vergata

Università di Roma Tre

Roma, 7 Aprile 2008

Progetto Olimpiadi della Matematica

sezione di Roma

Gara a Squadre di Secondo Livello

1. In un baule ci sono 1000 calzini alla rinfusa, di 100 colori diversi (10 per ciascun colore). C'è buio e non si vede nulla. Determinare il minimo numero di calzini che bisogna prendere per essere sicuri di averne almeno 2 dello stesso colore.

2. Tracciando le diagonali AC, CE, EA, BD, DF e FB di un esagono regolare $ABCDEF$ di area 2310, questo viene suddiviso in 13 regioni. Determinare l'area di quella a forma di esagono regolare.

3. Una capra è legata con una corda lunga 12 metri ad un angolo di una casa a base quadrata col lato di 6 metri, completamente circondata da un prato enorme senza ostacoli. Sia A l'area, espressa in m^2, della porzione di prato sulla quale la capra riesce a brucare l'erba. Quanto vale A/π?

4. Il testo di una gara è costituito da 100 quesiti a scelta multipla. Il punteggio preso in ciascun quesito è 0 se è sbagliato, 1 se è non svolto e 5 se è esatto. Quanti sono i possibili punteggi diversi che si possono ottenere partecipando alla gara?

5. In un rombo $ABCD$ sia P il punto medio del lato DC e Q il punto medio del segmento DP. Infine sia R l'intersezione tra la diagonale DB e il segmento AQ. Sapendo che il triangolo PQR ha area unitaria, determinare l'area del rombo $ABCD$.

6. Che posizione occupa la parola MONOCOLO nella lista di tutti i suoi anagrammi, compresi quelli senza senso, messi in ordine alfabetico?

7. Piero gioca a un solitario al computer. Il computer tiene in memoria l'esito di ogni partita (vinta o persa) e indica la percentuale di partite vinte, approssimandola all'intero più vicino (nel caso di una percentuale come 78,5 si approssima per eccesso, cioè a 79). Finora Piero ha fatto 100 partite e ha una percentuale di vittorie del 90%. Quante partite consecutive deve ora vincere Piero perché il computer gli assegni la percentuale di vittorie del 95%?

8. Sia $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2x}$. Definiamo $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$, ecc. Quanto vale $f^{2008}(2008)$?

9. Il signor Mauro, vicedirettore della rivista *Focus Brain Trainer*, fa l'ultimo controllo prima di dare l'OK per la stampa.
Nella rubrica *Matematica (e non solo)* trova la seguente *Sommiramide*

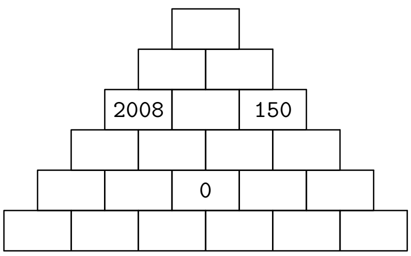

figura 1

Il gioco consiste nel riempire le caselle vuote con dei numeri interi non negativi, in modo che ciascuna casella sia la somma delle due sulle quali poggia.
Il signor Mauro però si accorge che la *Sommiramide* in questione non è univocamente determinata (esistono cioè più modi di completarla) e suggerisce al responsabile della rubrica di aggiungere un numero nella casella in cima, in modo tale che la soluzione diventi unica.
Qual è il più grande numero che si può mettere nella casella in cima in modo che ciò accada?

10. Si consideri il luogo dei punti del piano dai quali un quadrato di lato 10 è visto sotto un angolo di 45°. L'area della regione da esso racchiusa è un numero del tipo $A + B\pi$, con A e B interi. Quanto vale A?

11. Determinare quante sono le cifre del prodotto di tutti i divisori di 1000000 (compresi 1 e 1000000).

12. Un grosso rotolo di nastro adesivo ha il diametro di 20 cm. Dopo averne utilizzati 39 metri, il diametro è diventato di 19 cm. Quanti metri bisogna ancora utilizzarne perché il diametro diventi di 10 cm?

13. Ugo, Aldo, Luca, Ada, Eva, Ida, Sara e Claudia si siedono ad una tavola rotonda con 8 posti in modo che due maschi non siano mai vicini tra loro. In quanti modi diversi possono farlo? (Due modi di disporsi al tavolo vanno considerati lo stesso, se esiste una rotazione del tavolo che li porta a coincidere)

14. Si lanciano 7 dadi, ciascuno con le 6 facce numerate da 1 a 6. Sia p la probabilità che tra i sette risultati escano tutte le 6 facce. Quanto vale la parte intera di $\frac{10}{p}$?

15. In un magazzino ci sono 10.000 sacchetti di caramelle. Ognuno di questi sacchetti contiene un numero di caramelle maggiore o uguale a 1 e minore o uguale a 11. Si sa che comunque si dividano i sacchetti in due gruppi non vuoti di sacchetti, almeno uno dei due gruppi di sacchetti contiene un numero totale di caramelle multiplo di 11. Sotto queste condizioni qual è il massimo numero di sacchetti contenente un numero di caramelle diverso da 11?

16. Di una funzione $F : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, cioè di una funzione che ad ogni numero intero associa un numero intero, si sa che $F(F(x)) = x+2$ e che $F(25) = 100$. Quanto vale $F(2008)$?

17. Quanti sono i triangoli i cui lati hanno misura intera e il cui perimetro è 508?

18. Sia $P(x)$ il polinomio che si ottiene da $(1 + x)^{19} + x(1 + x)^{18} + x^2(1 + x)^{17} + \ldots + x^{19}$ sviluppando i prodotti e sommando i termini simili. Determinare il coefficiente del suo termine di grado 16.

19. Una pulce salta sui punti di coordinate intere dello spazio, partendo da $(0, 0, 0)$. Ogni suo salto consiste nell'incrementare di 1 una e una sola delle 3 coordinate. In quanti modi può arrivare in $(3, 3, 3)$ rimanendo sempre sulla superficie del cubo di lato 3 avente un vertice in $(0, 0, 0)$ e gli spigoli paralleli agli assi cartesiani?

20. In quanti modi si possono disporre dei numeri interi lungo i lati di un cubo in modo che il prodotto dei numeri che appaiono lungo i lati di ogni faccia del cubo sia uguale a -7?

Soluzione del Problema 1.

La risposta corretta è 101.

Infatti prendere 100 calzini non basta, visto che potrebbero essere tutti di colori diversi.

Prendendone 101 invece, visto che i colori sono 100, siamo sicuri che i calzini non possono essere tutti diversi e quindi ce ne sarà almeno una coppia dello stesso colore.

Soluzione del Problema 2.

La risposta corretta è 770.

La figura che si ottiene seguendo le indicazioni del testo è la seguente:

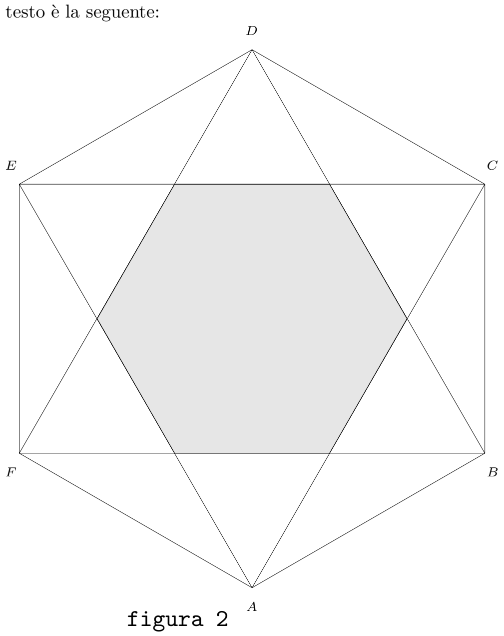

figura 2

L'area cercata è quella dell'esagono evidenziato in figura. Per riconoscere che anch'esso è regolare basta osservare che ruotando di 60° l'esagono $ABCDEF$ intorno al suo centro, tutta la figura si sovrappone a se stessa. Da ciò segue che l'esagono ombreggiato ha i lati e gli angoli tutti congruenti e quindi è regulare.

A questo punto è semplice anche mostrare che sono equilateri tutti i triangoli ombreggiati nella figura seguente:

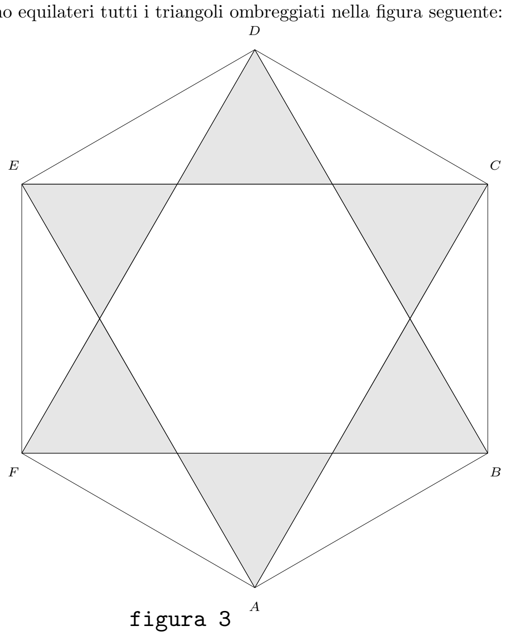

figura 3

Infatti hanno tutti 2 angoli che sono di 60° perché angoli esterni dell'esagono regolare più piccolo.

Inoltre, le aree ombreggiate in figura 2 e in 3 sono identiche perchè entrambe costituite da 6 triangoli equilateri con lo stesso lato, come mostra la figura seguente:

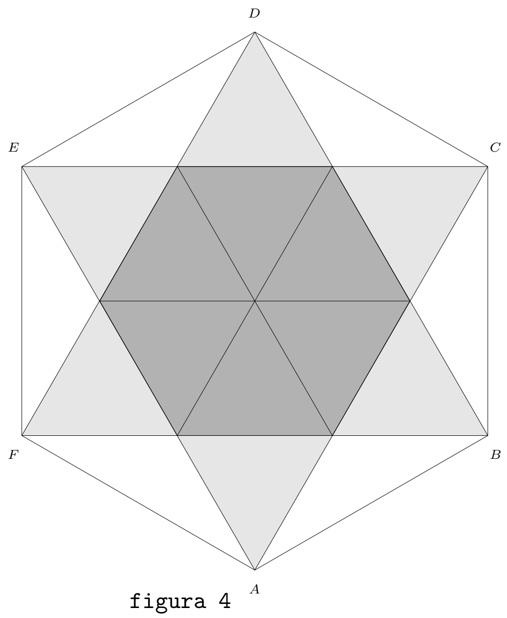

figura 4

Infine anche l'area ombreggiata nella figura seguente è uguale a quella ombreggiata nelle figure 2 e 3

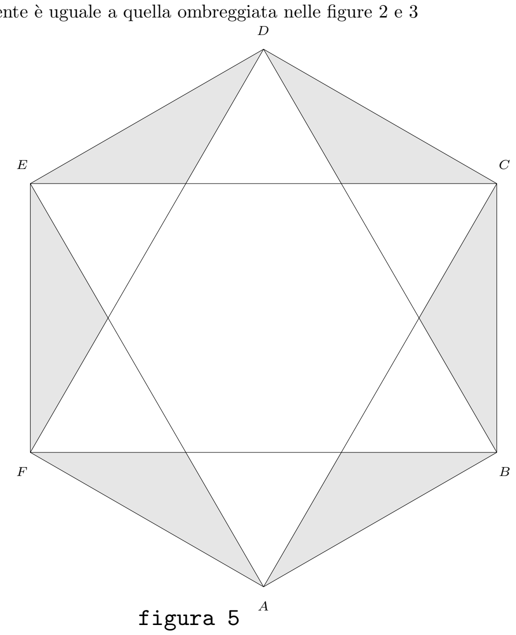

figura 5

perché i triangoli evidenziati in grigio chiaro e in grigio scuro nella figura seguente

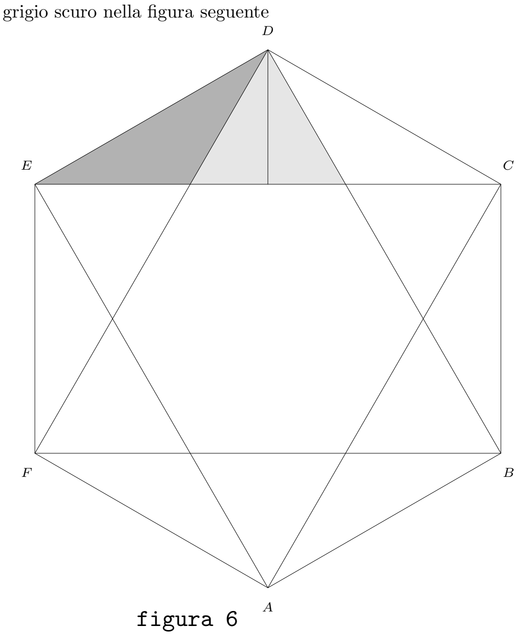

figura 6

hanno la stessa area, perchè hanno ugual base ed uguale altezza.

Possiamo quindi concludere che le 3 aree evidenziate nelle figure 2, 3 e 5 sono tutte uguali a un terzo dell'area dell'esagono $ABCDEF$ e quindi valgono 770.

Soluzione del Problema 3.

La risposta corretta è 126.

Infatti consideriamo la figura seguente:

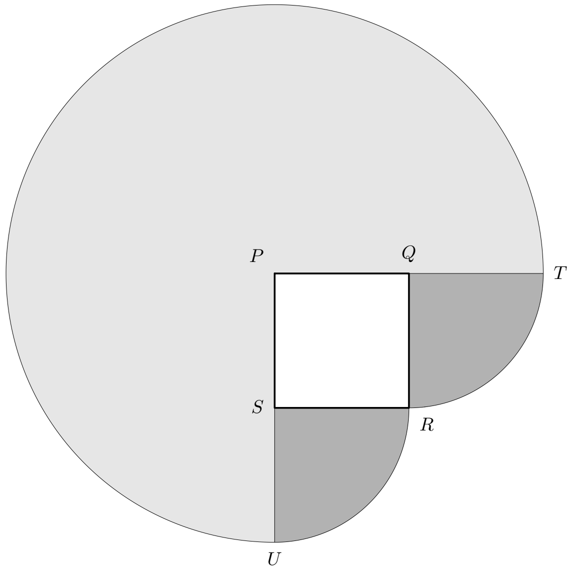

figura 7

dove $PQRS$ è la pianta della casa, mentre P è l'angolo a cui è legata la capra.

Nella zona di piano da cui di vede il punto P i punti raggiungibili sono tutti e soli quelli che distano non più di 12m da P, cioè i punti evidenziati in grigio chiaro nella figura.

Invece, una volta girato l'angolo Q (o S), i punti raggiungibili sono tutti e soli quelli che distano meno di $6m$ da Q (o da S), evidenziati in grigio scuro nella figura.

La zona cercata è quindi l'unione delle zone evidenziate in grigio chiaro e in grigio scuro nella figura. Quindi la sua area espressa in m^2 è data da:

$$A = \frac{3}{4} \cdot 12^2 \cdot \pi + \frac{1}{4} \cdot 6^2 \cdot \pi + \frac{1}{4} \cdot 6^2 \cdot \pi = 126\pi.$$

Quindi $\dfrac{A}{\pi} = 126$.

Soluzione del Problema 4.

La risposta corretta è 495.

Ovviamente il punteggio 500 si può ottenere: basta fare tutto giusto.

Osserviamo che se a una risposta giusta se ne sostituisce una sbagliata il punteggio scende di 5 punti, mentre se ad una risposta giusta se ne sostituisce una non data il punteggio scende di 4 punti. Di conseguenza, i punteggi ottenibili immediatamente al di sotto del 500 sono 496 e 495, che corrispondono rispettivamente a 99 giuste e 1 non fatta e 99 giuste e una sbagliata.

Quindi 499, 498 e 497 non sono ottenibili come punteggio.

Nei casi rimanenti le risposte giuste non saranno più di 98 e quindi il punteggio massimo ottenibile non supererà 492, che corrisponde a 98 giuste e 2 non fatte.

Quindi 494 e 493 non sono ottenibili come punteggio.

Invece, nel caso che le risposte giuste siano 98, oltre al punteggio 492 si possono ottenere anche i punteggi 491 e 490, che corrispondono rispettivamente a 98 giuste 1 non fatta e 1 sbagliata e a 98 giuste e 2 sbagliate.

Nei casi rimanenti le risposte giuste non saranno più di 97 e quindi il punteggio massimo ottenibile non supererà 488, che corrisponde a 97 giuste e 3 non fatte.

Ciò significa che il punteggio 489 non può mai essere ottenuto, mentre, mentre 488, 487, 486 e 485 sì, perchè corrispondono a 97 risposte giuste più, rispettivamente, 3, 2, 1 o 0 risposte non date.

Infine tutti i punteggi minori di 485 si possono ottenere. Infatti sono della forma $5k + r$, con $k = 0, 1, \ldots, 96$ e $r = 0, 1, 2, 3, 4$. Quindi si possono ottenere con k risposte giuste e r risposte non date. Ciò è possibile perché, essendo 100 le domande, se le risposte giuste non superano 96, rimangono sempre almeno altre 4 domande.

Quindi i punteggi validi sono tutti i numeri tra 0 e 500, ad eccezione di 489, 493, 494, 497, 498 e 499.

Si tratta dunque di 495 numeri.

Soluzione del Problema 5.

La risposta corretta è 40.

Si disegni la figura secondo le indicazioni del testo, dopodiché si mandino da R e da A le perpendicolari a DC indicando rispettivamente con H e con K i loro piedi.

La figura che si ottiene è la seguente:

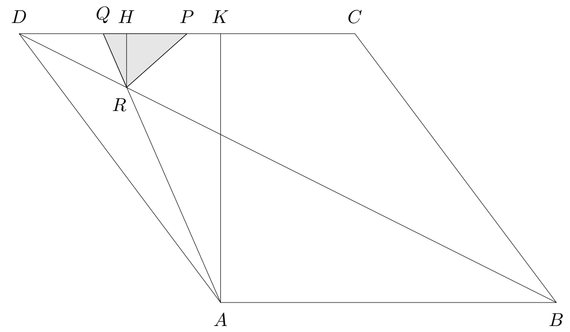

figura 8

È immediato constatare che

(1) $$\overline{DC} = 4\overline{QP}$$

Mostriamo ora che

(2) $$\overline{AK} = 5\overline{RH}$$

A tale scopo osserviamo che i 2 triangoli ABR e QDR sono simili visto che $\widehat{BRA} = \widehat{DRQ}$, perché opposti al vertice, mentre $\widehat{ABR} = \widehat{QDR}$ e $\widehat{RAB} = \widehat{RQD}$ perché angoli alterni interni di rette parallele tagliate da una trasversale.
Di conseguenza, essendo $\overline{AB} = \overline{DC} = 4\overline{DQ}$ si avrà anche $\overline{RA} = 4\overline{QR}$ e quindi $\overline{QA} = 5\overline{QR}$.
Da ciò segue immediatamente che $\overline{AK} = 5\overline{RH}$, considerando la similitudine tra i 2 triangoli rettangoli AKQ e RHQ.
Da (1) e (2) segue la tesi, infatti:

$$\text{area}\,(ABCD) = \overline{DC} \cdot \overline{AK} = 4\overline{QP} \cdot 5\overline{RH} = 40 \cdot \frac{\overline{QP} \cdot \overline{RH}}{2} = 40 \cdot \text{area}\,(PQR) = 40 \cdot 1 = 40.$$

Soluzione del Problema 6.

La risposta corretta è 560.
Gli anagrammi della parola **MONOCOLO** che la precedono in ordine alfabetico sono i seguenti:
(a) tutti quelli che iniziano per **C** o per **L**,
(b) tutti quelli che iniziano per **MC**, **ML** o **MN**,
(c) tutti quelli che iniziano per **MOC** o per **MOL**,
(d) tutti quelli che iniziano per **MONC** o per **MONL**,
(e) la parola **MONOCLOO**.

Gli anagrammi di **MONOCOLO** che iniziano per **C** sono tanti quanti gli anagrammi della parola **MONOOLO**, cioè $\frac{7!}{4!} = 210$; lo stesso dicasi per quelli che iniziano per **L**. Quindi l'insieme descritto al punto (a) contiene 420 anagrammi.
Analogamente, gli anagrammi che iniziano per **MC** sono tanti quanti gli anagrammi della parola **ONOOLO**, cioè $\frac{6!}{4!} = 30$; lo stesso dicasi per quelli che iniziano per **ML** o **MN**. Quindi l'insieme descritto al punto (b) contiene 90 anagrammi.
In modo analogo si ottiene che sono $\frac{5!}{3!} = 20$ sia gli anagrammi che iniziano per **MOC** sia quelli che iniziano per **MOL**, mentre sono $\frac{4!}{3!} = 4$ sia quelli che iniziano per **MONC** che quelli che iniziano per **MONL**.
Infine, l'insieme descritto al punto (e) è costituito (ovviamente) da un solo anagramma.
Di conseguenza gli anagrammi che precedono **MONOCOLO** sono $420 + 90 + 40 + 8 + 1 = 559$.
Ciò significa che la parola **MONOCOLO** occupa la $560-$esima posizione.

Soluzione del Problema 7.

La risposta esatta è 82.
In primo luogo è chiaro che, fino ad ora, Piero ha vinto 90 delle 100 partite giocate, perché, su 100 partite, non si pongono problemi di approssimazione. Affinchè il computer assegni a Piero la percentuale di vittorie del 95%, tenendo conto dell'approssimazione, basta che Piero raggiunga una percentuale maggiore o uguale al 94,5%. Se Piero vince le prossime x partite, avrà vinto, in tutto, $90 + x$ partite su $100 + x$.
Dobbiamo quindi risolvere la disequazione:

$$\frac{90 + x}{100 + x} \geq \frac{94,5}{100}$$

che, tenendo conto della positività di x, diventa:

$$5,5x \geq 450$$

cioè

$$x \geq \frac{900}{11} \approx 81,81..$$

Il minimo intero che soddisfa l'ultima disuguaglianza è 82.

Soluzione del Problema 8.

La risposta corretta è 2008.
Infatti, calcolando $f^2(x)$, $f^3(x)$ e $f^4(x)$ si ottiene:

$$f^2(x) = f\left(f(x)\right) = 1 - \frac{1}{2f(x)} = 1 - \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{2x}\right)} = \cdots = \frac{x-1}{2x-1}$$

$$f^3(x) = f\left(f^2(x)\right) = 1 - \frac{1}{2f^2(x)} = 1 - \frac{1}{2\left(\frac{x-1}{2x-1}\right)} = \cdots = \frac{-1}{2x-2}$$

$$f^4(x) = f\left(f^3(x)\right) = 1 - \frac{1}{2f^3(x)} = 1 - \frac{1}{2\left(\frac{-1}{2x-2}\right)} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{x-1}\right)} = 1 + x - 1 = x.$$

Dal fatto che $f^4(x) = x$ segue che $f^n(x) = x$ tutte le volte che n è un multiplo di 4. Quindi anche $f^{2008}(x) = x$.

Di conseguenza $f^{2008}(2008) = 2008$.

Soluzione del Problema 9.

La risposta esatta è 3596.

Per prima cosa osserviamo che le 2 caselle su cui poggia la casella contenente lo 0 devono necessariamente contenere anch'esse 0, visto che i loro contenuti devono essere non negativi e con somma nulla.

Indichiamo ora con A, B, C e D i numeri contenuti nelle caselle indicate nella figura seguente:

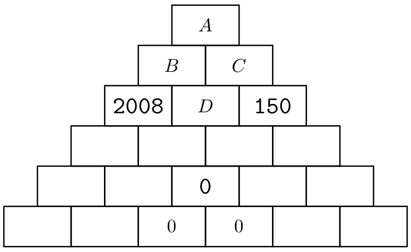

figura 9

In base alle regole del gioco si ha $A = B + C = (2008 + D) + (D + 150) = 2158 + 2D$.

Ciò significa che per trovare qual è il massimo valore che si può mettere in A, basta prima trovare qual è il massimo valore che si può mettere in D.

Di conseguenza, visto che i valori alla base della piramide determinano univocamente tutti gli altri, basterà cercare quali sono i valori da dare ad α, β, γ e δ nella figura seguente affinché D assuma il valore massimo possibile:

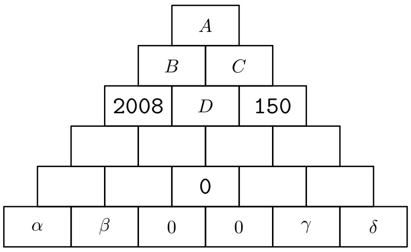

figura 10

Dalle regole del gioco segue che $2008 = \alpha + 3\beta$, come si può vedere nella figura seguente:

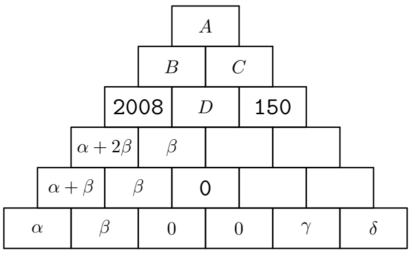

figura 11

Ciò significa che tra tutte le possibili coppie di valori che si possono assegnare ad α e β, quella che massimizza il valore di β è $\alpha = 1$ e $\beta = 669$.

In modo del tutto analogo, osservando la figura seguente

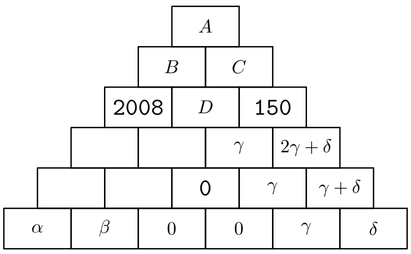

figura 12

si trova che, tra tutte le coppie di valori che si possono assegnare a γ e δ, quella che massimizza γ è $\gamma = 50$ e $\delta = 0$.

Si noti che $D = \beta + \gamma$, come si può osservare nella figura seguente:

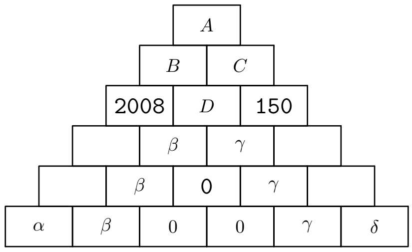

figura 13

Quindi D è massimo quando β e γ sono massimi.

Ciò significa che il massimo valore che può assumere D è $669 + 50$, cioè 719.

Ricordando che il valore in cima alla piramide è $A = 2008+150+2D$ si ottiene che il massimo valore che si può assegnare ad A è $2008+150+2\cdot 719$, cioè 3596.

Mettendo tale valore nella casella di vertice della piramide si ottiene che l'unico modo di riempire le altre caselle è il seguente:

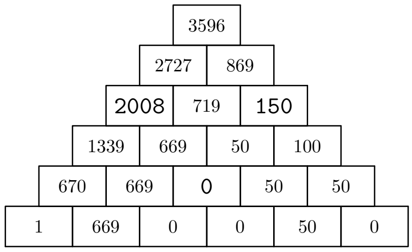

figura 14

Soluzione del Problema 10.

La risposta corretta è 400.

Per prima cosa ricordiamo che il luogo dei punti del piano dai quali un segmento AB è visto sotto un dato angolo 45° è costituito dai due archi di di circonferenza aventi estremi in A e B e il cui angolo al centro è 90°, come è visualizzato nella figura seguente.

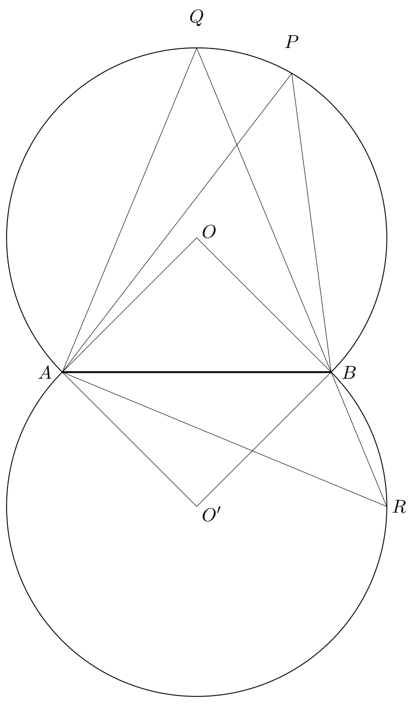

figura 15

Ciò è conseguenza del fatto l'angolo alla circonferenza di una corda è sempre la metà del corrispondente angolo al centro.

A questo punto, è abbastanza semplice convincersi che, se $ABCD$ è il quadrato di lato 10 assegnato, il luogo cercato è l'unione degli 8 archi visualizzati nella figura seguente:

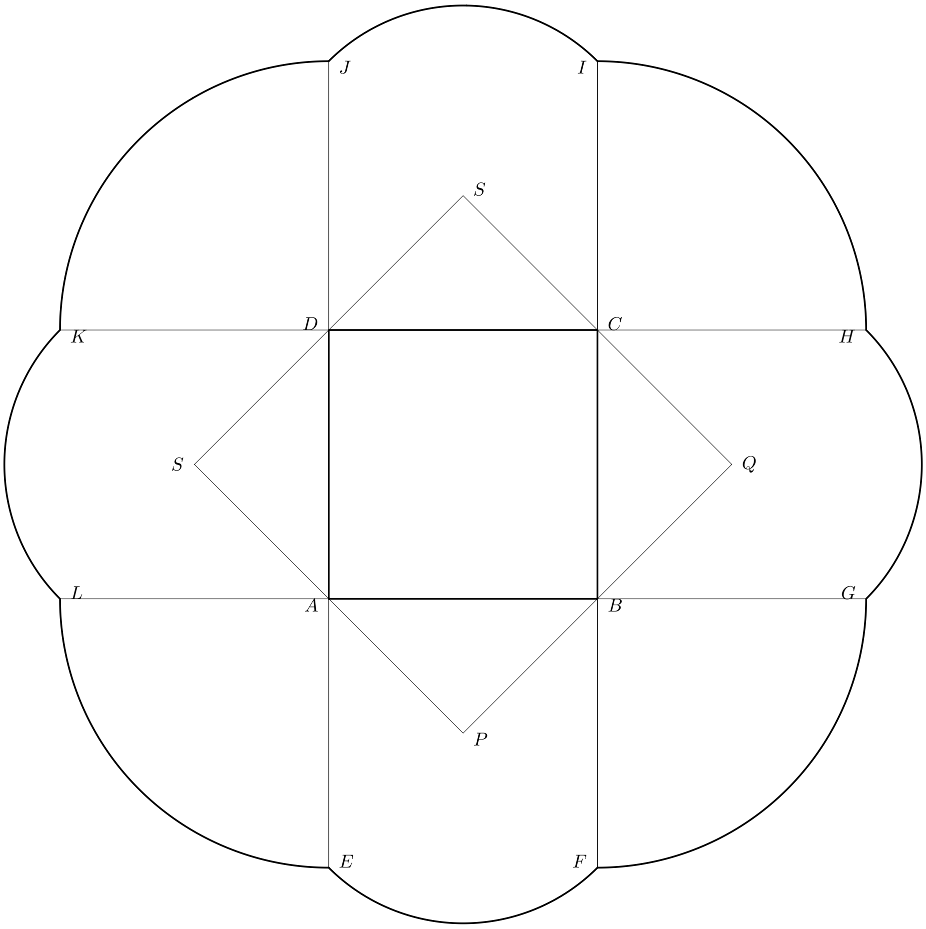

figura 16

L'area complessiva della regione di piano racchiusa da tale luogo è

$$10^2 \cdot \pi + 4 \cdot 10^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 \cdot \pi = 150\pi + 400.$$

Quindi $A = 400$.

Soluzione del Problema 11.

La risposta corretta è 148.

Per cominciare osserviamo che $1000000 = 2^6 \cdot 5^6$ e quindi i suoi divisori sono tutti e soli i numeri del tipo $2^\alpha 5^\beta$ con α e β interi e compresi tra 0 e 6, quindi sono 49.

Osserviamo che, se a è un divisore di 1000000, allora anche $b = \dfrac{1000000}{a}$ lo è e si ha (ovviamente) $ab = 1000000$. Per rendere più agevole la spiegazione conveniamo di chiamare *complementari* due divisori a e b di 1000000 tali che $ab = 1000000$.

A questo punto, se si esclude 1000, che è complementare di se stesso, tutti gli altri 48 divisori di 1000000 possono essere organizzati in 24 coppie ottenute accoppiando tra loro i divisori che sono complementari.

Poiché il prodotto dei due divisori di ogni coppia è esattamente 1000000, il prodotto degli elementi di tutte le 24 coppie è 1000000^{24} e quindi quello di tutti i 49 divisori è $1000 \cdot (1000000)^{24}$, cioè $10^3 \cdot \left(10^6\right)^{24}$, cioè 10^{147}, che è un numero di 148 cifre.

Soluzione del Problema 12.

La risposta corretta è 261.

Osserviamo la figura seguente

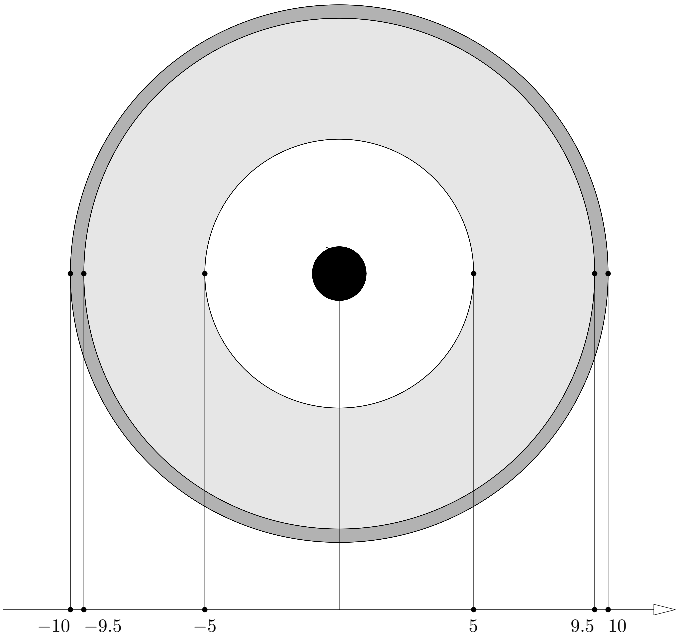

figura 17

che rappresenta il rotolo di nastro adesivo visto in sezione.
Consumando i primi 39 metri di nastro adesivo, dal rotolo sparisce la parte di sezione evidenziata in grigio scuro. Si tratta di capire a quanti metri di nastro adesivo corrisponde la parte di sezione evidenziata in grigio chiaro.
Poiché il nastro adesivo ha spessore costante, la sua lunghezza è proporzionale all'area della sezione del rotolo.
Detto ciò, osserviamo che l'area della parte corrispondente ai 39 metri già consumati è:

$$A_1 = \pi\left(10^2 - 9.5^2\right) = \pi \cdot \frac{39}{4},$$

mentre l'area corrispondente a quello che si deve ancora consumare è

$$A_2 = \pi\left(9.5^2 - 5^2\right) = \pi \cdot \frac{261}{4},$$

Quindi, detta x la lunghezza del nastro corrispondente alla sezione grigio chiaro si ha:

$$x : A_2 = 39 : A_1,$$

cioè

$$x = \frac{39A_2}{A_1} = \frac{39 \cdot \pi \cdot \frac{261}{4}}{\pi \cdot \frac{39}{4}} = 261.$$

Soluzione del Problema 13.

La risposta corretta è 1440.
Per cominciare immaginiamo di segnare con pallini bianchi i posti del tavolo in cui si siedono le femmine e con pallini neri quelli in cui si siedono dei maschi.
A meno di rotazioni, le uniche situazioni che si possono presentare sono le seguenti:

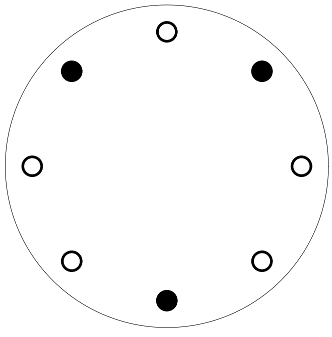

figura 18

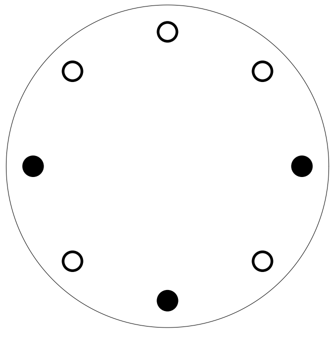

figura 19

Si noti che nessuna di tali configurazioni può essere sovrapposta a se stessa con una rotazione che non sia di un numero intero di giri. Ciò significa che, comunque si prendano 2 modi diversi di distribuire i 3 maschi sui posti neri e le 5 femmine sui posti bianchi, non ci sarà mai una rotazione che li porti a coincidere.
Detto ciò, siccome i 3 maschi si possono distribuire sui posti neri in 3! modi e le femmine sui posti bianchi in 5! modi, il numero di modi di distribuire le 8 persone in ciascuna delle due configurazioni è di $3! \cdot 5!$ cioè 720.
Complessivamente quindi si ottengono 1440 distribuzioni diverse.

Soluzione del Problema 14.

La risposta corretta è 185.
L'insieme di tutti gli eventi U, poichè ogni dado può dare 6 risultati diversi è costituito da 6^7 eventi.
Se ora indichiamo con A_k, con $k = 1, \ldots, 6$ l'insieme di tutti gli eventi in cui compare doppia la faccia contrassegnata con k e compaiono una e una sola volta le altre facce, otteniamo che gli A_k sono tutti disgiunti e l'insieme di tutti gli eventi favorevoli è $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6$.
Inoltre tutti gli A_k contengono lo stesso numero di eventi, pari a $\binom{7}{2} \cdot 5!$, perché la coppia di dadi che danno per risultato la faccia k-esima può essere scelta in $\binom{7}{2}$ modi, mentre i rimanenti 5 risultati possono distribuirsi tra i rimanenti 5 dadi in 5! modi.
Di conseguenza l'insieme A di tutti gli eventi favorevoli è costituito da $6 \cdot \binom{7}{2} \cdot 5!$ eventi.
Ciò significa che la probabilità che si verifichi l'evento in questione è

$$p = \frac{6 \cdot \binom{7}{2} \cdot 5!}{6^7}.$$

Quindi

$$\frac{10}{p} = 10 \cdot \frac{6^7}{6 \cdot \binom{7}{2} \cdot 5!} = \frac{6^4}{7} = \frac{1296}{7} \approx 185, \ldots$$

da cui segue che il numero cercato è 185.

Soluzione del Problema 15.

La risposta corretta è 1.
Chiamiamo n il numero richiesto. Chiaramente se $n = 1$, dividendo i sacchetti nel modo dato, uno dei due gruppi di sacchetti ha tutti sacchetti con 11 caramelle. Se invece $n > 1$, siano A_1, A_2,...,A_n i sacchetti contenenti un numero di caramelle, indicato rispettivamente con a_1, a_2,...,a_n, diverso da 11. Proviamo che supponendo vera la proprietà data sulla suddivisione dei sacchetti si arriva a una contraddizione. Proviamo intanto che tutti gli a_i sono uguali, per esempio $a_1 = a_2$. Scegliendo i due gruppi di sacchetti uno con A_1, l'altro con tutti gli altri sacchetti, poiché a_1 per ipotesi non è multiplo di 11, si ha che $a_2 + a_3 + ... + a_n$ è multiplo di 11. Ragionando analogamente si ottiene che $a_1 + a_3 + ... + a_n$ è multiplo di 11. Facendo la differenza, si avrà che $a_1 - a_2 = \left(a_1 + a_3 + ... + a_n\right) - \left(a_2 + a_3 + ... + a_n\right)$ è multiplo di 11, e poiché a_1 e a_2 sono numeri tra 1 e 10, l'unica possibilità è $a_1 = a_2$, come affermato. Scegliamo ora i due gruppi di sacchetti uno con A_1 e A_2, l'altro con tutti gli altri sacchetti. Poiché il numero totale di sacchetti del primo gruppo è $a_1 + a_2 = 2a_1$, che non è multiplo di 11 in quanto $2a_1$ è un numero pari compreso tra 2 e 20, dovrà essere $a_3 + ... + a_n$ multiplo di 11. Siccome avevamo già visto che $a_2 + a_3 + ... + a_n$ è multiplo di 11, allora per differenza anche a_2 è multiplo di 11, contro la nostra ipotesi.

Soluzione del Problema 16.

La risposta esatta è 1935.
Infatti se, partendo da 25, scriviamo in successione i numeri che si ottengono applicando la funzione F otteniamo:

$$25 \mapsto 100 \mapsto 27 \mapsto 102 \mapsto 29 \mapsto 104 \mapsto ...$$

Quindi l'effetto di F sui numeri pari è quello di sottrarre 73. In conclusione, $F(2008) = 2008 - 73 = 1935$.
Si osservi che l'applicazione di F ai numeri dispari aggiunge invece 75.

Soluzione del Problema 17.

La risposta esatta è 5376.
Se indichiamo con a, b e c i lati del triangolo e conveniamo di indicare sempre con a il lato più piccolo e con c il lato più grande, il problema equivale a trovare quante sono le terne di numeri interi strettamente positivi che soddisfano simultaneamente le condizioni:
(3) $a + b + c = 508$,
(4) $a \leq b \leq c$,
(5) $a + b > c$.
La (3) esprime il fatto che il perimetro è 508, la (4) il fatto che si è convenuto di indicare con a il lato minore e con b il maggiore, mentre la (5) il fatto che a, b e c devono essere i lati di un triangolo.
Si noti che da (3) e (4) segue che $c \geq \frac{508}{3}$ e quindi, poichè c deve essere intero, si ottiene

$$c \geq 170. \tag{6}$$

Invece da (3) e (5) segue che $c < \frac{508}{2}$ e quindi

$$c \leq 253. \tag{7}$$

Se ora, per ogni c tale che $170 \leq c \leq 253$, indichiamo con $T(c)$ il numero di triangoli che hanno c come lato maggiore e 508 come perimetro, la soluzione del nostro problema sarà data da

$$\sum_{c=170}^{253} T(c). \tag{8}$$

Si tratta ora di trovare una formula precisa per $T(c)$ da inserire nella (8).
A tale scopo ricordiamo innanzitutto che $b \leq c$.
Inoltre, poichè $a + b = 508 - c$ e b è il più grande dei 2 lati rimanenti, avremo che $b \geq \frac{508 - c}{2}$.
Quindi avremo che

$$\frac{508 - c}{2} \leq b \leq c \quad \text{se } c \text{ è pari,}$$
$$\frac{509 - c}{2} \leq b \leq c \quad \text{se } c \text{ è dispari.}$$

Di conseguenza

$$T(c) = \begin{cases} c - \dfrac{508-c}{2} + 1 & \text{se } c \text{ è pari,} \\ c - \dfrac{509-c}{2} + 1 & \text{se } c \text{ è dispari,} \end{cases}$$

cioè

$$T(c) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}c - 253 & \text{se } c \text{ è pari,} \\ \dfrac{3}{2}(c-1) - 252 & \text{se } c \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Ora che abbiamo trovato $T(c)$ possiamo calcolare la sommatoria (8).
Infatti si ha:

$$\begin{aligned}
\sum_{c=170}^{253} T(c) &= \sum_{\substack{c=170 \\ c \text{ pari}}}^{253} \left(\frac{3}{2}c - 253\right) + \sum_{\substack{c=170 \\ c \text{ dispari}}}^{253} \left(\frac{3}{2}(c-1) - 252\right) = \\
&= \sum_{k=85}^{126} \left(\frac{3}{2}2k - 253\right) + \sum_{k=85}^{126} \left(\frac{3}{2}(2k+1-1) - 252\right) = \\
&= \sum_{k=85}^{126} (3k-253) + \sum_{k=85}^{126} (3k-252) = \\
&= -42 + 2\sum_{k=85}^{126} (3k-252) = -42 + 6\sum_{k=85}^{126} (k-84) = -42 + 6\sum_{n=1}^{42} n = \\
&= -42 + 6 \cdot \frac{42 \cdot 43}{2} = 5376,
\end{aligned}$$

che è il risultato cercato.

Soluzione del Problema 18.

La risposta corretta è 4845.
Ricordiamo che:

$$P(x) = (1+x)^{19} + x(1+x)^{18} + x^2(1+x)^{17} + \ldots + x^{16}(1+x)^3 + x^{17}(1+x)^2 + x^{18}(1+x) + x^{19}.$$

Dallo sviluppo di $x^{17}(1+x)^2 + x^{18}(1+x) + x^{19}$ non si ottengono termini di grado 16.
Invece, grazie alla formula del binomio di Newton, per ogni $k = 0, 1, 2, \ldots, 16$, il termine di grado 16 di $x^k(1+x)^{19-k}$ è dato da $x^k \binom{19-k}{16-k} x^{16-k}$. Di conseguenza il suo coefficiente è $\binom{19-k}{16-k}$ che, grazie alle proprietà di simmetria dei coefficienti binomiali, è uguale a $\binom{19-k}{19-k-(16-k)}$, cioè a $\binom{19-k}{3}$.
Il termine di grado 16 nello sviluppo di $P(x)$ è quindi dato da:

$$\begin{aligned}
&\binom{19-0}{3} + \binom{19-1}{3} + \binom{19-2}{3} + \ldots + \binom{19-15}{3} + \binom{19-16}{3} = \\
&= \binom{19}{3} + \binom{18}{3} + \binom{17}{3} + \ldots + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = \\
&= \binom{20}{4} = 4845.
\end{aligned}$$

Si noti che nella penultima uguaglianza abbiamo utilizzato con $n = 19$ e $k = 3$ la formula:

(9) $$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1},$$

che vale per ogni $n, k \in \mathbf{N}$, con $n \geq k \geq 0$.
Tale formula può essere facilmente dimostrata per induzione su n.
Infatti, per $n = k$ la (9) è ovvia.
Inoltre, supposto che valga per $n = n_0 \geq k$, essa vale anche per $n = n_0 + 1$ perché:

$$\begin{aligned}
&\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n_0-1}{k} + \binom{n_0}{k} + \binom{n_0+1}{k} = \\
&= \left(\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n_0-1}{k} + \binom{n_0}{k}\right) + \binom{n_0+1}{k} = \\
&= \binom{n_0+1}{k+1} + \binom{n_0+1}{k} = \binom{n_0+2}{k+1},
\end{aligned}$$

dove la penultima uguaglianza segue dall'ipotesi induttiva mentre l'ultima segue dalla nota proprietà dei coefficienti binomiali:

$$\binom{p}{q} + \binom{p}{q+1} = \binom{p+1}{q+1},$$

che vale per ogni $p, q \in \mathbf{N}$, con $p > q$.
Un modo alternativo per riconoscere che vale la (9), nel caso che si conoscano già bene le proprietà del triangolo di Tartaglia, è quello di riconoscere che il primo membro di (9) altro non è che la somma dei primi $n - k + 1$ termini della $k-$esima traversa del triangolo di Tartaglia.

Soluzione del Problema 19.

La risposta corretta è 384.
La figura seguente rappresenta il cubo sulla cui superficie la pulce deve saltare quando passa da $A \equiv (0,0,0)$ a $G \equiv (3,3,3)$:

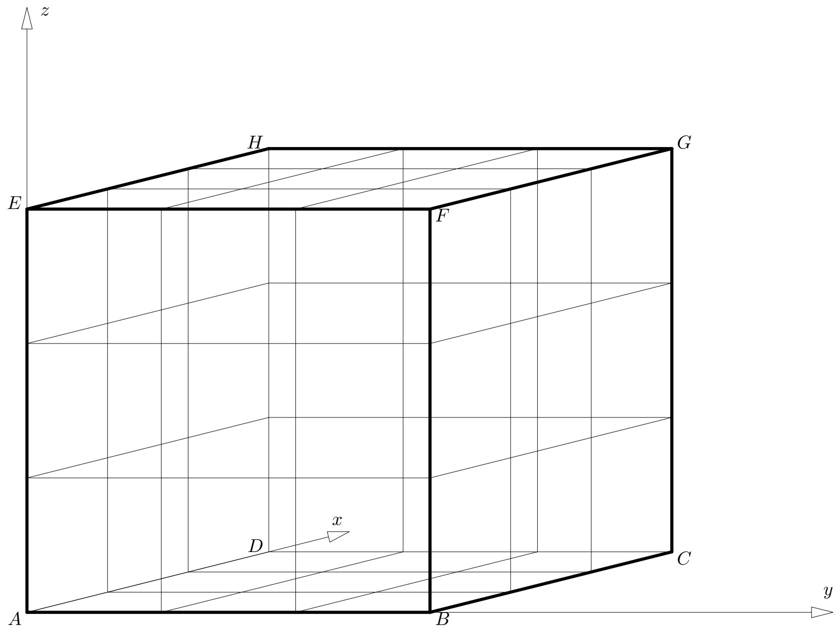

figura 20

Per cominciare troviamo quanti sono i percorsi che vanno da A a G intersecando lo spigolo BF, cioè rimanendo sulle 2 facce laterali $ABFE$ e $BCGF$, che abbiamo evidenziato nella figura seguente tracciando la griglia su cui devono giacere i percorsi:

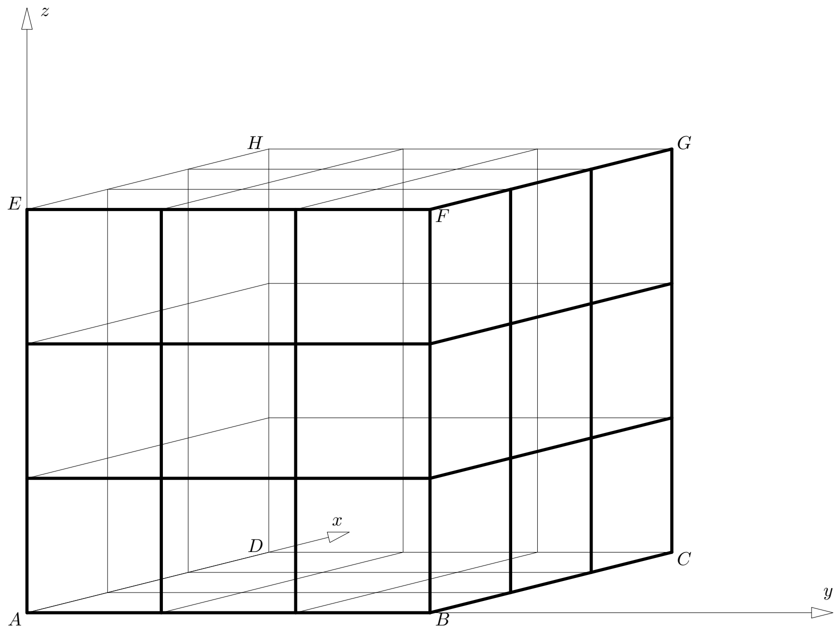

figura 21

Per contare tali percorsi immaginiamo di raddrizzare la griglia nel modo visualizzato nella figura seguente:

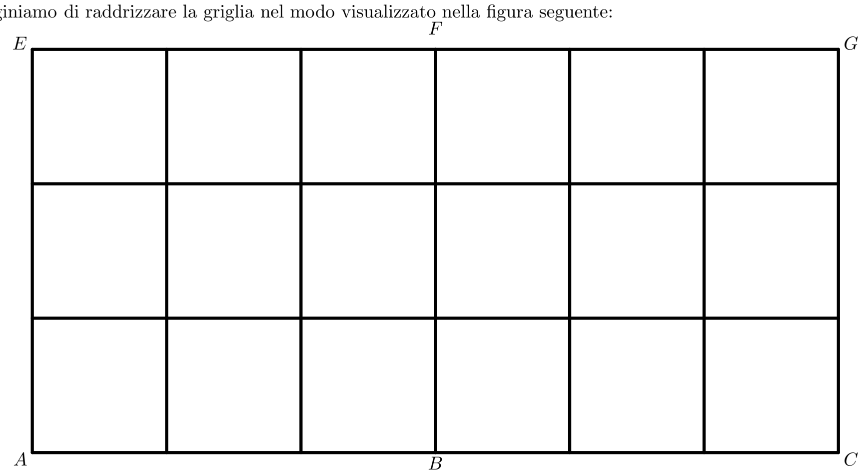

figura 22

A questo punto è semplice verificare che i percorsi che vanno da A a G compiendo solo spostamenti di un passo a destra o in alto sono $\binom{9}{3}$, cioè 84.
Infatti per andare da A a G bisogna fare 6 spostamenti a destra, che denoteremo con **D**, e 3 spostamenti in alto, che denoteremo con **A**. Ad ogni parola di 9 lettere, contenente 6 **D** e 3 **A** corrisponderà un percorso diverso. Ad esempio, alla parola **ADADDDDDA** corrisponde il percorso evidenziato nella figura seguente:

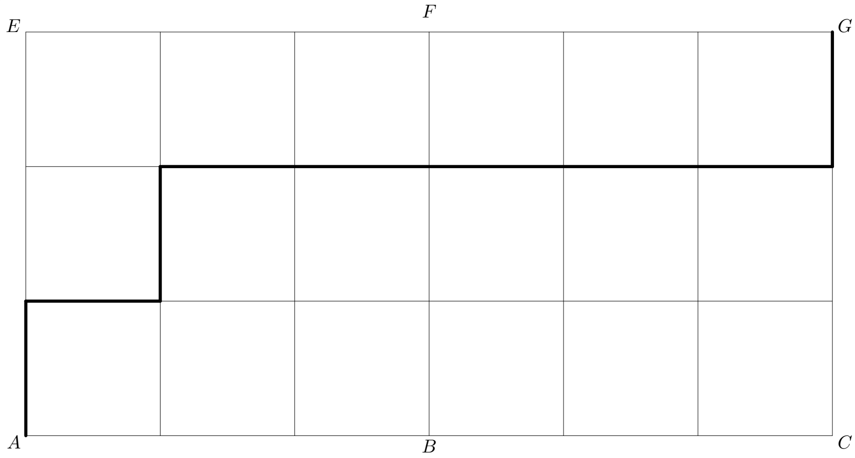

figura 23

Possiamo quindi concludere che i percorsi da A a G sono tanti come gli anagrammi della parola **AAADDDDDD**, cioè proprio $\binom{9}{3}$.
Analogamente si trova che sono 84 anche i percorsi che vanno da A a G intersecando uno qualsiasi degli altri spigoli che non contengono A o G.
Passiamo ora a contare i percorsi che vanno da A a G passando per C, cioè quelli che stanno sulla griglia evidenziata nella figura seguente:

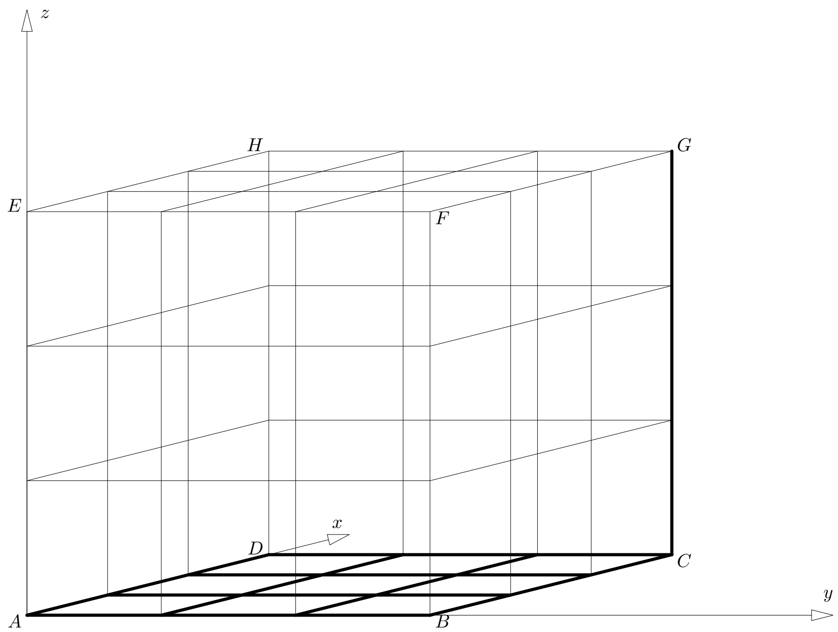

figura 24

Procedendo come prima si trova che essi sono $\binom{6}{3}$, cioè 20.
Analogamente si trova che sono 20 anche i percorsi da A a G che passano per B, F, E, H o D.
Siamo ora in grado di completare la soluzione del problema.
Infatti, se ci chiediamo quali sono i percorsi che vanno da A a G intersecando la spezzata EFB, otterremo che prendendo tutti quelli che intersecano EF ed FB avremo contato due volte quelli che passano per F. Ciò significa che i percorsi che vanno da A a G intersecando la spezzata EFB sono $84 + 84 - 20$, cioè 148.
Analogamente sono 148 anche i percorsi che intersecano la spezzata DHE e quelli che intersecano la spezzata BCD.
Ora, l'insieme di tutti i percorsi cercati coincide con l'insieme di tutti quelli che vanno da A a G intersecando la spezzata chiusa $EFBCDHE$.
Se per trovarli mettiamo insieme quelli delle tre spezzate EFB, BCD e DHE, avremo contato due volte quelli che passano per E, per B o per D. Quindi, in tutto, i percorsi cercati sono $3 \cdot 148 - 3 \cdot 20$, cioè 384.

Soluzione del Problema 20.

La risposta corretta è 1024.
Osserviamo che possiamo dividere questo conteggio in due parti. Sia N il numero di modi in cui è possibile disporre dei numeri interi positivi sui lati di un cubo in modo che il prodotto dei numeri che appaiono lungo i lati di ogni faccia del cubo sia uguale a 7 e sia M il numero in cui è possibile disporre i numeri $\{1, -1\}$ sui lati di un cubo in modo che il prodotto dei numeri che appaiono lungo i lati di ogni faccia del cubo sia uguale a -1. Il numero cercato sarà quindi $N \cdot M$.
Mostriamo che $N = 8$. Affinché il prodotto dei numeri messi lungo i lati di una faccia sia 7 possiamo mettere tre 1 ed un 7. Fissiamo una faccia. Il numero totale di modi in cui possiamo disporre gli interi positivi affinché il prodotto sia 7 è uguale a 4. Consideriamo ora una faccia f adiacente alla precedente, che non contenga il lato su cui abbiamo disposto il numero 7 ma che contenga un vertice, che indichiamo con A del lato contenente il numero 7. Sui lati della faccia f che contengono A dobbiamo per forza disporre il numero 1. Dobbiamo scegliere quindi dove

disporre il 7 in uno dei due rimanenti lati. Una semplice figura mostra come ognuna di queste due scelte determina univocamente la disposizione dei numeri su tutti i lati del cubo. Quindi $N = 4 \cdot 2 = 8$.
Mostriamo che $M = 128$. Fissiamo una faccia. Affinché il prodotto dei numeri messi lungo i lati della faccia sia -1 possiamo mettere tre 1 ed un -1 o tre -1 ed un 1. Il numero totale di modi in cui possiamo mettere ± 1 lungo i lati della faccia che abbiamo fissato è quindi 8. Analogamente possiamo disporre ± 1 in 8 modi diversi lungo i lati della faccia opposta. Indichiamo con a, b, c, d i lati che uniscono le due facce opposte in modo che il lato a sia opposto a c. Sul lato a possiamo mettere ± 1 in 2 modi diversi. Se vogliamo che il prodotto dei numeri che compaiono sui lati della faccia a cui appartengono i lati a e b sia -1 la scelta effettuata per a determina univocamente la scelta del numero da mettere sul lato b e ragionando analogamente, sostituendo ad a prima b e poi c questo determina il numero da mettere su c e d. Rimane da verificare che anche il prodotto dei lati della faccia contenente a e d sia uguale a -1. Sappiamo già che per ognuna delle altre 5 facce il prodotto dei numeri che compaiono sui loro lati è uguale a -1. Se indichiamo con $n_1, \ldots, n_6$ i 6 prodotti che si ottengono scegliendo una faccia e moltiplicando i numeri che compaiono sui suoi lati osserviamo che $n_1 \cdots n_6 = 1$, infatti ogni lato del cubo compare in questo prodotto due volte. Quindi se 5 tra i numeri $n_1, \ldots, n_6$ sono uguali a -1 anche il sesto sarà uguale a meno. Quindi $M = 8 \cdot 8 \cdot 2 = 128$.