

Roma, 26 Marzo 2009

Progetto Olimpiadi della Matematica

sezione di Roma

Gara a Squadre di Secondo Livello

1. Quanti sono i numeri interi strettamente positivi minori di 6000 che non sono divisibili né per 6 né per 5?
2. Quanti sono i numeri interi strettamente positivi e non maggiori di 10.000 che hanno un numero pari di divisori? (tra i divisori di un numero n vanno contati anche 1 e n)
3. Sia ABC un triangolo isoscele di base AB e con l'angolo al vertice \widehat{ACB} che misura 37° e sia N un punto della base AB tale che $\widehat{ACN} = 11^\circ$. Preso P su CN si tracci la retta passante per P e perpendicolare a CN e sia Q il suo punto di intersezione con AC . Detta R la proiezione di Q su CB , dire quanto vale l'angolo \widehat{NPR} .
4. Quante sono le parole di 8 lettere (anche senza senso) contenenti solo vocali (cioè A, E, I, O, U) e tali che le lettere che vi compaiono siano disposte in ordine alfabetico?
5. Sviluppando i calcoli di $\frac{(1+\sqrt{2})^{13}}{3+2\sqrt{2}}$ si ottiene un numero del tipo $a+b\sqrt{2}$, con a e b interi. Quanto vale $a-b$?
6. Calcolare il volume del poliedro (attenzione: non è un tronco di piramide) rappresentato nella figura seguente:

- $A \equiv (4, 3, 0)$
 $B \equiv (-4, 3, 0)$
 $C \equiv (-4, -3, 0)$
 $D \equiv (4, -3, 0)$
 $E \equiv (1, 1, 10)$
 $F \equiv (-1, 1, 10)$
 $G \equiv (-1, -1, 10)$
 $H \equiv (1, -1, 10)$

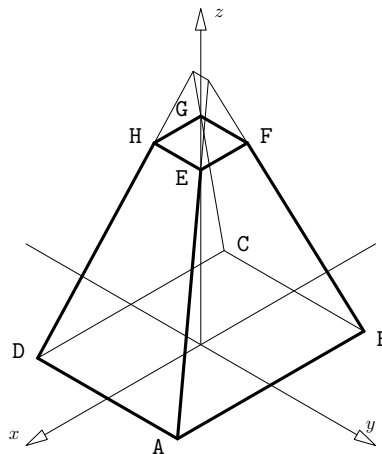


figura 1

7. Il triangolo ABC , rettangolo in B , ha il cateto AB che misura 1Km e il cateto BC che misura 1.5Km. Sia P un punto sul segmento AB tale che $PA = \frac{1}{24}BA$ e Q un punto sul segmento CA tale che $QA = \frac{1}{24}CA$. Sia R l'intersezione tra PC e QB . Qual è la misura (in metri) del segmento AR ?
8. Nel triangolo ABC il lato AB misura 26cm e il lato BC misura 168cm. Determinare la misura del lato CA (espressa in cm) sapendo che la mediana BM ad esso relativa misura 85cm. (se si ritiene che il problema sia impossibile o indeterminato indicare come risposta 0)

9. Un pentagono regolare e un dodecagono regolare sono inscritti nella stessa circonferenza γ ed hanno in comune un vertice che indicheremo con A_0 . I rimanenti 4 vertici del pentagono e 11 vertici del dodecagono costituiscono un insieme di 15 punti della circonferenza γ che, partendo dal punto A_0 e percorrendo la circonferenza in senso antiorario, possiamo denominare rispettivamente A_1, A_2, \dots, A_{15} .
 Congiungiamo A_0 con A_5 , A_5 con A_{10} , A_{10} con A_{15} , A_{15} con A_4 , e così via, ovvero congiungiamo ciascun punto con quello che si trova, ruotando in senso antiorario, 5 posizioni più avanti. Dopo aver tracciato esattamente 16 segmenti ci si ritrova nel punto A_0 , completando così il disegno di una stella (irregolare) a 16 punte che ha i punti A_0, A_1, \dots, A_{15} come vertici.
 Quanto vale (espressa in gradi) la somma dei 16 angoli acuti che la stella ha nei suoi vertici?

10. Sia data una piramide avente per base un trapezio scaleno. Vogliamo decorare ogni suo vertice con un numero scelto tra 1, 2, 3 (sono ovviamente ammesse ripetizioni). In quante maniere è possibile farlo in modo che, per ogni faccia, la somma dei numeri che stanno sui suoi vertici sia pari?

11. La figura 2 rappresenta la pianta di 2 corridoi lunghi e stretti, della larghezza di soli 90cm, che si intersecano ad angolo retto. Si noti che, a peggiorare la viabilità vi è anche una piccola colonna quadrata PQRS, il cui lato è di 5cm. Agli arredatori è stato chiesto di progettare un tavolo rettangolare (ma non quadrato) di area più grande possibile e dotato di rotelle, che possa effettuare la manovra indicata nelle figure 3 e 4, senza mai sollevarlo in posizioni strane, ma solo facendolo scorrere sulle rotelle.
 Qual è la massima area, espressa in cm^2 , che tale tavolo può avere?

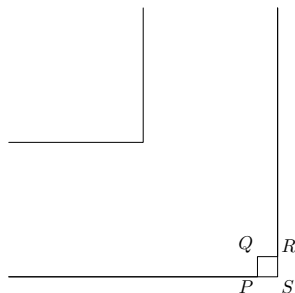


figura 2

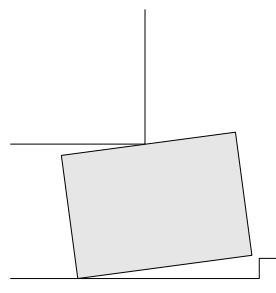


figura 3

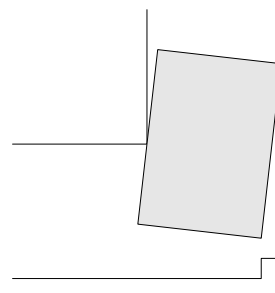


figura 4

12. Il provveditorato agli studi di Roma dispone di 24 milioni di Euro ed ha una lista di 10 scuole da finanziare con tali fondi. In quanti modi diversi lo può fare se decide di distribuire tutto il denaro che ha a disposizione, destinando a ciascuna scuola della lista 1, 2 o 3 milioni di Euro?

13. Una grossa cisterna della capacità di 1 milione di litri è piena esattamente per metà. Su di essa si può operare in 2 modi:
A : togliere esattamente 191 litri usando un mestolo gigante;
B : aggiungere esattamente 480 litri usando un misurino gigante.
 Effettuando opportunamente operazioni di tipo **A** e di tipo **B** si vuole che, alla fine, la quantità di liquido contenuta nella cisterna sia aumentata esattamente di 7 litri rispetto alla situazione iniziale.
 Qual è il minimo numero di operazioni che bisogna fare per riuscirci? (nel caso sia impossibile indicare 0 come risposta)

14. Eseguendo la divisione con resto tra il polinomio $p_1(x) = -3x^{81} + 10x^{41} + x^{27} + 6x^{21} + 2x^7 + x^2 + 9x + 53$ e il polinomio $p_2(x) = x^{20} + 2$ si ottiene un certo polinomio quoziente $q(x)$ e un polinomio resto $r(x)$, quest'ultimo con grado strettamente minore di $p_2(x)$.
 Quanto vale $r(23)$?

15. In un triangolo i 3 lati misurano rispettivamente $\frac{13}{2}\sqrt[3]{195}$, $7\sqrt[3]{195}$ e $\frac{15}{2}\sqrt[3]{195}$. Per ogni suo punto interno P indichiamo con M_P il prodotto delle 3 distanze di P dai lati del triangolo.
 Qual è, al variare di P all'interno del triangolo, il massimo valore che può assumere M_P ?

16. Secondo le regole del gioco degli scacchi, il re muove passando dalla casella in cui si trova ad una delle 8 caselle ad essa adiacenti, cioè aventi con quella di partenza un lato o un vertice in comune. La scacchiera è un quadrato di 8×8 caselle, le 8 colonne sono contrassegnate con le lettere dalla **A** alla **H**, mentre le 8 righe orizzontali sono contrassegnate con i numeri da **1** a **8**.
 Se inizialmente si pone il re nella casella **B1**, con quanti diversi percorsi di 7 mosse si può farlo arrivare nell'ottava riga, rimanendo però sempre nelle colonne **A**, **B** e **C**.

17. In quanti modi il numero 200 può essere scritto come somma di 3 numeri interi non negativi, eventualmente anche nulli? (due modi vanno considerati uguali se, a meno dell'ordine, sono composti dagli stessi numeri)

18. In un diagramma cartesiano consideriamo una quadrettatura in cui ogni quadrato ha lato 1 e vertici a coordinate intere. Tracciamo poi, nel primo quadrante, un quarto di circonferenza di centro l'origine e raggio intero n , per ogni n da 1 a 10. Diremo che un arco di circonferenza attraversa un quadretto se passa per un punto ad esso interno (cioè non basta che ne tocchi il perimetro). Si consideri il numero dei quadretti attraversati da ciascun arco di circonferenza; qual è la somma di tali numeri (al variare di n da 1 a 10)?

19. Sul pianeta Tondo, l'anno è composto da 10.000 giorni, numerati da 1 a 10.000. Su tale pianeta vivono tre fratellini: Claudia, Luca e Marco. Claudia dice la verità solo nei giorni dell'anno che sono multipli di 36, mentre è bugiarda in tutti gli altri giorni. In modo del tutto analogo Luca dice la verità solo nei giorni che sono multipli di 19 e Marco dice la verità solo nei giorni pari. Si consideri il seguente dialogo:
Claudia: - Domani sarò una bugiarda.
Luca: - Domani sarò un bugiardo.
Marco: - Almeno uno di voi due sta mentendo.
Qual è il primo giorno dell'anno in cui tale dialogo si può svolgere? (indicare 0 se si ritiene che tale dialogo non si possa svolgere in alcun giorno)

20. Quanti sono i parallelepipedi aventi volume 10^{10}cm^3 e spigoli la cui misura espressa in cm è intera? (due parallelepipedi vanno considerati uguali se, a meno dell'ordine, le misure dei loro spigoli coincidono)

Risposte

Problema 1	:	4000
Problema 2	:	9900
Problema 3	:	127
Problema 4	:	495
Problema 5	:	2378
Problema 6	:	220
Problema 7	:	100
Problema 8	:	170
Problema 9	:	1080
Problema 10	:	33
Problema 11	:	8100
Problema 12	:	2850
Problema 13	:	144
Problema 14	:	329
Problema 15	:	1568
Problema 16	:	577
Problema 17	:	3434
Problema 18	:	96
Problema 19	:	360
Problema 20	:	744