Università di Roma la Sapienza
Università di Roma Tor Vergata
Università di Roma Tre

Roma, Tor Vergata, 25 Marzo 2010

Gara a Squadre di Secondo Livello

(valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico)

1. Sia $\mathcal{C}$ un cubo con lo spigolo che misura 1 metro e sia $\mathcal{P}$ un parallelepipedo rettangolo tale che la somma dei suoi spigoli sia uguale a quella di $\mathcal{C}$. Inoltre la misura degli spigoli di $\mathcal{P}$, espressa in centimetri, è intera. Qual è, espresso in cm^3, il minimo valore strettamente positivo che può assumere la differenza tra i volumi dei due solidi?

2. Quanti sono gli interi n non minori di 4 e non maggiori di 10000 tali che $n(n-1)(n-2)(n-3)$ non è divisibile per 16?

3. In una stanza buia vi sono 2 ceste, che indicheremo con A e B. La cesta A contiene 5000 scarpe destre: 1000 bianche, 1000 rosse, 1000 verdi, 1000 viola e 1000 gialle. La cesta B invece contiene 5000 scarpe sinistre, ma sempre degli stessi 5 colori della cesta A e nelle stesse quantità per ciascun colore.
Luca deve prendere un paio di scarpe (una scarpa destra e una scarpa sinistra) che abbiano entrambe lo stesso colore ma, essendo buio, non può vedere i colori delle scarpe che prende. Decide quindi di prenderne un numero N_A dalla cesta A e un numero N_B dalla cesta B in modo che, tra le scarpe che ha preso ci siano necessariamente una scarpa destra ed una scarpa sinistra con lo stesso colore.
Qual è il minimo valore che può avere $N_A + N_B$?

4. Attorno alla stella *Lucente* ruotano nello stesso verso con velocità costanti su orbite circolari (aventi *Lucente* come centro e giacenti tutte sullo stesso piano) tre pianeti: *Bingo*, *Bango* e *Bongo*. Sapendo che i periodi di rivoluzione dei tre pianeti sono rispettivamente 24, 88 e 152 anni terrestri, e che, ad un certo istante, essi giacciono tutti sulla stessa semiretta avente origine in *Lucente*, dire quanto vale, misurato in anni terrestri, il minimo intervallo di tempo che deve trascorrere prima che i tre pianeti giacciano di nuovo tutti su una semiretta avente origine in *Lucente*.

5. Dati i due numeri $n = 111.333.222.666$ e $m = 111.333.333.111$, dire quanti sono i divisori di m che non sono divisori di n.

6. Tre cordicelle flessibili ma non elastiche che misurano rispettivamente 32cm, 35cm e 36cm, hanno un'estremità libera mentre l'altra è legata ad un punto P del soffitto di una stanza, distante diversi metri sia dal pavimento che dalle pareti laterali. Se indichiamo con A, B e C le tre estremità libere delle tre corde, dire qual è il massimo valore (espresso in cm^3) che può assumere il volume del tetraedro con i vertici in A, B, C e P al variare delle posizioni che i tre punti A, B e C possono occupare nella stanza.

7. Nel gioco del **Risiko**, quando una regione attacca con 3 armate una regione difesa da un'armata sola, il combattimento si svolge nel modo seguente: l'attaccante lancia 3 dadi e il difensore ne lancia uno solo; se almeno uno dei tre dadi lanciati dall'attaccante dà un risultato strettamente maggiore di quello lanciato dal difensore, allora il difensore ha perso.
Sia $\frac{m}{n}$ la frazione (ridotta ai minimi termini) che rappresenta la probabilità che il difensore sia sconfitto al primo attacco.
Quanto vale m?

© Emanuele Callegari c/o Dipartimento di Matematica - Università di Roma Tor Vergata - Tutti i diritti sono riservati
Altro materiale disponibile alla pagina: www.problemisvolti.it

8. Il quadrato $ABCD$ ha il lato di 288cm. Detti E, G, I e K i punti medi dei suoi lati, si consideri l'ottagono regolare $EFGHIJKL$ (vedi figura **1**). Infine si prenda sulla diagonale BD il punto M in modo che BM sia congruente a BA.

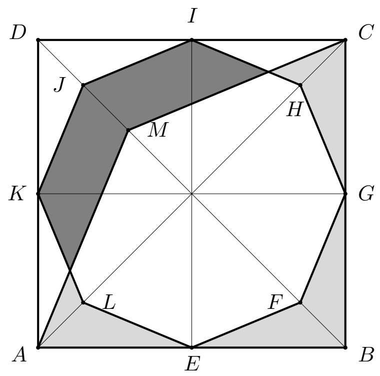

figura 1

Qual è la differenza (espressa in cm^2) tra l'area della zona evidenziata in grigio chiaro e quella della zona evidenziata in grigio scuro?

9. All'esame del corso di Geometria Algebrica, tenuto dal prof. Di Gennaro, si presentano 8 studenti. Dopo l'esame il docente espone in bacheca la lista (in ordine alfabetico) dei nomi di coloro che l'hanno superato, con il relativo voto conseguito (il voto è un numero intero che va da 18 a 30, estremi compresi).
Dire quante sono le possibili liste che soddisfano simultaneamente le seguenti proprietà:

1. Il voto più alto è 30.
2. I voti sono tutti diversi.
3. La somma dei voti è 92.

Si ricordi che due liste vanno considerate diverse se differiscono almeno per un nome o, a parità di nomi, almeno per un voto.

10. Su ciascuno dei 3 lati di un triangolo equilatero si prendano 10 punti in modo da dividerlo in 11 segmenti congruenti. Per ciascuno di tali punti si traccino le parallele ai 2 lati del triangolo su cui il punto non giace. Sia $\mathcal{A}$ l'insieme costituito dai 3 vertici del triangolo e da tutti i punti interni al triangolo o sul suo bordo, per i quali passino almeno 2 rette distinte di quelle tracciate prima.
Dire quanti sono i triangoli equilateri aventi per vertici 3 punti di $\mathcal{A}$, contando anche quelli i cui lati non sono paralleli a quelli del triangolo iniziale.

11. Il perimetro di un triangolo, espresso in millimetri, è un numero intero, mentre la somma delle mediane è 3 metri. Quanti diversi valori può assumere il perimetro?

12. Sia data la retta r che giace sul piano Σ. Su Σ si tracciano altre 20 rette $r_1, r_2, \ldots r_{20}$, distinte tra loro e da r, ciascuna delle quali è parallela o perpendicolare ad r. Si traccia infine una retta s, che forma con r un angolo di 45°.
In tal modo il piano Σ viene suddiviso da queste 22 rette distinte in n regioni, limitate o illimitate. Quanti valori diversi può assumere n al variare dei modi in cui vengono scelte le rette?

© Emanuele Callegari c/o Dipartimento di Matematica - Università di Roma Tor Vergata - Tutti i diritti sono riservati
Altro materiale disponibile alla pagina: www.problemisvolti.it

13. Il quadrato $ABCD$ ha il lato di 576cm. Detto O il suo centro ed M il punto medio di CD prendiamo P in modo che la sua distanza da A sia uguale ad AB, la sua distanza da O sia uguale a OM e la sua distanza da D sia minore di quella da B (vedi figura **2**). Indichiamo infine con Q il simmetrico di P rispetto alla retta OM e con H la proiezione di P su OQ.

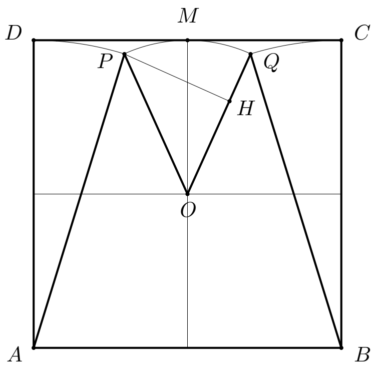

figura 2

Quanto misura (in cm) il segmento PH?

14. Sia data una scacchiera quadrata con il lato di 10000 caselle. Per ogni intero n, con $n \geq 1$, chiameremo n-cavallo un pezzo che muove saltando da una casella all'altra, in modo tale che la casella di partenza e quella di arrivo siano legate dalla seguente relazione: il più piccolo rettangolo con i lati paralleli ai lati della scacchiera che le contiene entrambe ha i lati che misurano 2 ed n (non importa quale dei due lati è verticale e quale è orizzontale). Ad esempio, il cavallo del gioco degli scacchi è un 3-cavallo.
Quanti sono i valori di n per i quali l'n-cavallo, partendo da una casella d'angolo della scacchiera, può coprirla tutta?

15. È data una piramide irregolare $\mathcal{P}$ avente per base il quadrilatero convesso $ABCD$ e per vertice V. Sappiamo inoltre che esiste una sfera contenuta in $\mathcal{P}$ e tangente a tutte le sue 5 facce e conosciamo le misure degli angoli al vertice di 3 delle 4 facce laterali: $\widehat{AVB} = 33°11'$, $\widehat{BVC} = 24°32'$ e $\widehat{CVD} = 35°38'$.
Dire qual è la misura dell'angolo $\widehat{DVA}$ espressa in *primi*. (se si ritiene che il problema sia impossibile indicare come risposta 0, se invece si ritiene che la misura di $\widehat{DVA}$ non sia univocamente determinata, indicare come risposta 9999)

16. Una classe è composta da 10 alunni: 4 ragazze e 6 ragazzi. I ragazzi sono tutti amici tra di loro e anche con ciascuna delle ragazze. Le ragazze invece, pur essendo amiche dei ragazzi, si odiano tutte tra loro. All'ora di pranzo si mettono in fila nella mensa della scuola (che è costituita da quell'unica classe).
Sia N il numero di modi diversi in cui possono mettersi in fila, in modo che due persone che si odiano non siano mai vicine tra loro.
Dire quanto vale $\dfrac{N}{100}$.

17. Sia $\mathcal{I} = \{P_1, P_2, \ldots, P_{12}\}$ l'insieme dei dodici vertici di un dodecagono regolare. Dire quanti sono i triangoli non degeneri dotati di entrambe le seguenti proprietà:

1. i tre vertici del triangolo appartengono tutti all'insieme $\mathcal{I}$;
2. nel piano su cui giace il triangolo, esiste un punto K dal quale i tre lati del triangolo sono visti tutti sotto lo stesso angolo.

(Si ricordi che un segmento AB è visto sotto un angolo α dal punto K, distinto da A e B, se l'angolo convesso $\widehat{AKB}$ è congruente ad α)

18. Del tetraedro di vertici A, B, C e D sono note le misure dei 6 spigoli: $AB = BC = CA = 21$m e $DA = DB = DC = 12,4$m. Detto M il punto medio dello spigolo AB ed N il baricentro della faccia ACD, indichiamo con P il punto di intersezione del segmento BN con il piano passante per i punti D, C e M. Quanto misura (in cm) il segmento DP?

© Emanuele Callegari c/o Dipartimento di Matematica - Università di Roma Tor Vergata - Tutti i diritti sono riservati
Altro materiale disponibile alla pagina: www.problemisvolti.it

19. Sono date tre cordicelle flessibili ma non elastiche, due delle quali misurano 65cm mentre la terza misura 119cm. Tutte e tre le cordicelle hanno un'estremità libera mentre l'altra è legata ad un punto P del soffitto di una stanza, distante diversi metri sia dal pavimento che dalle pareti laterali. Se indichiamo con A, B e C le tre estremità libere delle tre corde, dire qual è il massimo valore (espresso in cm^2) che può assumere l'area del triangolo ABC, al variare delle posizioni che i tre punti A, B e C possono occupare nella stanza.

20. Qual è il minimo valore intero positivo di n che rende vera la disuguaglianza

$$a^n b^{12} \leq \left(a^{90} + b^{72}\right) \cdot \left(a^{30} + b^{40}\right)$$

per tutti i valori reali e positivi di a e b tali che $a^2 + b^2 \leq 1$?

Risposte e Statistiche

Nella tabella seguente riportiamo, per ogni problema, il risultato, il numero di risposte giuste e il numero complessivo di risposte che ha ricevuro durante la gara. Ricordiamo che, in base al regolamento, ogni squadra poteva continuare a tentare di rispondere a un problema quanto voleva, quindi è successo spesso che una squadra abbia dato diverse risposte sbagliate ad un problema, prima di dare la risposta giusta.

		risultato	giuste	totali
Problema 1	:	100	9	20
Problema 2	:	5000	8	20
Problema 3	:	4002	13	18
Problema 4	:	627	8	22
Problema 5	:	252	3	5
Problema 6	:	6720	3	4
Problema 7	:	95	6	18
Problema 8	:	0	0	0
Problema 9	:	8400	9	20
Problema 10	:	1001	0	14
Problema 11	:	999	0	2
Problema 12	:	48	0	0
Problema 13	:	216	0	3
Problema 14	:	2501	1	7
Problema 15	:	2657	0	0
Problema 16	:	6048	9	15
Problema 17	:	148	1	5
Problema 18	:	195	1	1
Problema 19	:	8640	0	5
Problema 20	:	105	0	2

© Emanuele Callegari c/o Dipartimento di Matematica - Università di Roma Tor Vergata - Tutti i diritti sono riservati
Altro materiale disponibile alla pagina: www.problemisvolti.it

Alcune considerazioni sui problemi

Qui di seguito, ad uso degli studenti che hanno partecipato (ed eventualmente dei loro docenti), vorrei riportare alcune considerazioni su come andavano svolti alcuni dei problemi e su eventuali errori frequenti che sono stati fatti nel loro svolgimento durante la gara.
In alcuni casi sono riuscito a trovare il tempo per scrivere la soluzione completa e l'ho riportata in appendice. Forse col tempo lo farò con tutti i problemi, ma per ora preferisco rendere disponibile subito ciò che è già pronto, in modo che coloro che devono prepararsi per la fase successiva della competizione, possano trarne subito qualche vantaggio.

Problema 1. Su questo problema c'è poco da dire. La sua soluzione si basa sul fatto che, fissata la somma di 3 numeri positivi a, b e c, il loro prodotto è massimo quando sono tutti uguali (cioè nel caso del cubo). Inoltre (questa cosa però va precisata e dimostrata) più ci si allontana dalla situazione in cui tutti sono uguali, più il prodotto diminuisce. Ne segue che la terna che minimizza la differenza dalla situazione in cui si ha il massimo è $(a, b, c) = (99, 100, 101)$ e la differenza che si ottiene tra 100^3 e $99 \cdot 100 \cdot 101$ è 100.

Problema 2. Il prodotto in questione è divisivile per 16 se e solo se tra i quattro fattori c'è un multiplo di 8 (visto che comunque uno degli altri tre fattori è sempre pari) cioè per $n = 8k$, $n = 8k + 1$, $n = 8k + 2$ o $n = 8k + 3$, con k intero. Gli n tra 4 e 10000 per cui questo non accade sono 5000.

Problema 3. Questo problema è risultato essere il più facile di tutta la gara: ben 13 delle 16 squadre partecipanti sono riuscite a risolverlo. In effetti è molto semplice convincersi che prendendo 4002 scarpe ce la si fa: basta prendere 4001 scarpe destre (in modo da averne di tutti i 5 colori) e poi prendere una scarpa sinistra. Però, per poter affermare che si è davvero risolto il problema, bisogna anche dimostrare che vale la seguente affermazione: *presi comunque x e y, interi positivi tali che $x + y = 4001$, è possibile prendere x scarpe destre e y scarpe sinistre in modo che non ci siano una scarpa destra e una scarpa sinistra dello stesso colore.* Non so quante delle squadre che hanno dato la risposta esatta al quesito si siano davvero soffermate a dimostrarlo.

Problema 4. La risposta **sbagliata** più gettonata per questo quesito è stata 5016, cioè il minimo comune multiplo tra i tre periodi di rivoluzione. Tale risposta sarebbe stata corretta se fosse stato chiesto dopo quanto tempo tutti e tre i pianeti si ritrovano nella posizione in cui si trovavano all'istante iniziale. Tuttavia i tre pianeti si riallineano anche su un'altra semiretta, non solo su quella nella quale si trovano all'istante iniziale.

Problemi 5. e 6. Sono rimasto stupito dal fatto che pochissime squadre abbiano risposto a questi quesiti, che pur avevo classificato come semplici, per cui ho deciso di riportarne la soluzione completa in appendice. In particolare continuo a pensare che il problema 6 sia estremamente semplice, ma che, in un certo senso, il fatto che sia coinvolta la geometria solida lo faccia percepire come difficile. Mi piacerebbe ricevere a tale proposito il parere degli insegnanti dei ragazzi coinvolti.

Problema 7. Quando il lancio del difensore dà come risultato k con $1 \leq k \leq 6$, egli sopravvive se e solo se tutti i dadi lanciati dall'attaccante danno un risultato minore o uguale a k. Ciò accade in k^3 casi. Quindi la probabilità che il difensore sia ancora vivo dopo il primo attacco è $\dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3}{6^4}$, cioè $\dfrac{49}{144}$. Quindi la probabilità che muoia al primo attacco è $\dfrac{95}{144}$.

Problema 8. Non solo questo problema non è stato risolto da nessuna squadra, me nessuno ha nemmeno cercato di rispondere. Immagino che questo significhi che questo problema è stato percepito come difficile o, perlomeno, come calcoloso. Niente di più falso: vi è un'idea veramente semplice che permette di concludere che le due zone, quella grigio chiaro e quella grigio scuro, hanno la stessa area, senza fare nessun calcolo. Invito gli studenti ad andarsi a leggere la soluzione, che ho deciso di mettere per esteso in appendice.

Problema 9. Molti studenti hanno frainteso la domanda ed hanno dato come risposta 5. Infatti erano 5 le possibili liste se si tenevano in considerazione solo i voti (senza cioè tener conto dei nomi degli studenti che li hanno presi):

I)	18,	19,	25,	30;
II)	18,	20,	24,	30;
III)	18,	21,	23,	30;
IV)	19,	20,	23,	30;
V)	19,	21,	22,	30;

Tuttavia, a ognuna di tali liste di voti, corrispondevano $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$ (cioè 1680) possibili liste di studenti. In tutto, quindi le liste possibili erano $5 \cdot 1680$, cioè 8400.

Problema 10. Ecco un problema che, pur non essendo stato risolto da nessuno, è stato tentato da molti. In appendice ho riportato per esteso la sua soluzione.

Problema 11. Nessuno ha risolto questo problema, e comunque, pochissimi ci hanno provato. La sua soluzione dettagliata si trova in appendice.

Problema 12. Questo problema (che nessuno ha risolto) è abbastanza semplice ma, effettivamente, un po' macchinoso. Lo avevo inserito perchè non necessita di alcuna nozione particolare e quindi si prestava ad essere risolto bene anche da ragazzi del biennio (anzi, della scuola media). Tuttavia la sua formulazione (e anche il suo procedimento risolutivo) lo rendono un po' pesante, per cui mi sono un po' pentito di averlo inserito.
Si parte osservando che, se fissiamo uguale a k il numero di rette perpendicolari ad r (senza perdere di generalità si può sempre supporre che sia $0 \leq k \leq 10$), il numero di zone che si ottengono dopo aver inserito la retta obliqua varia da un minimo di $(22 - k) \cdot (k + 1) + 22 - k$ a un massimo di $(22 - k) \cdot (k + 1) + 22$. Infatti il numero più grande corrisponde al caso in cui la retta obliqua interseca ognuna delle altre 21 rette in punti distinti, mentre il

© Emanuele Callegari c/o Dipartimento di Matematica - Università di Roma Tor Vergata - Tutti i diritti sono riservati
Altro materiale disponibile alla pagina: www.problemisvolti.it

numero più piccolo si ottiene quando le k rette perpendicolari a r sono intersecate dalla retta obliqua in punti in cui esse intersecano già anche una retta orizzontale. Una volta osservato ciò, basta enumerare i risultati trovati per k che varia da 0 a 10. Per $k = 0$ si ottiene come unico risultato 44. Per $k = 1$ si possono ottenere 2 risultati: 63 e 64. Per $k = 2$ si possono ottenere 3 risultati 80, 81 e 82. Andando avanti così, per $k = 10$ si ottengono 11 risultati: 144, 145, ..., 154.
Attenzione però a non concludere frettolosamente che vi sono $1+2+3+\ldots+11$, cioè 65, risultati diversi. Infatti, per k sufficientemente grande, i valori che si ottengono da k e da $k+1$ non sono tutti distinti. Questo succede quando il massimo risultato che si può ottenere da k supera o uguaglia il minimo risultato che si può ottenere da $k+1$, cioè quando

$$(22-k)\cdot(k+1)+22 \geq (22-(k+1))\cdot(k+2)+22-(k+1)$$

che, essendo k intero, è verificata per $k \geq 7$.
Ciò significa che, per k che varia da 0 a 6, i risultati che si ottengono al variare di k sono tutti diversi, quindi sono $1+2+3+\ldots+7$, cioè 28. Invece, per k che varia da 7 a 10, i risultati che si ottengono al variare di k si sovrappongono, quindi sono tutti gli interi che vanno dal minimo valore assunto per $k = 7$ al massimo valore assunto per $k = 10$, cioè tutti gli interi da 135 a 154, che sono esattamente 20.
Quindi i risultati possibili sono $28 + 20$, cioè 48.

Problema 13. Francamente parlando, questo problema mi sembrava abbastanza scolastico. Sono quindi rimasto un po' deluso dal fatto che nessuna squadra sia riuscita a rispondere. In appendice ho riportato per esteso un procedimento risolutivo che fa uso di nozioni elementari di trigonometria (il massimo che si richiede di sapere è la formula di duplicazione per il seno). Mi sembrava che, tra i vari procedimenti possibili fosse il più rapido. Tuttavia, accettando di complicare un po' i calcoli, credo che si possa anche evitare l'uso della trigonometria.

Problema 14. È abbastanza semplice convincersi che n non può essere pari: infatti, immaginando che le caselle della scacchiera siano alternativamente bianche e nere, se n fosse pari l'$n-$cavallo potrebbe coprire solo caselle dello stesso colore. È semplice anche convincersi che n non può essere maggiore di 5001: in tal caso infatti le caselle centrali non potrebbero essere raggiunte a partire da nessun punto. D'altra parte, se n è dispari e minore o uguale a 5001, è abbastaza semplice costruire una sequenza di mosse che porti l'$n-$cavallo dalla casella in cui si trova (qualsiasi essa sia) a una qualsiasi delle quattro caselle ad essa vicine. Ciò significa che i valori buoni per n sono tutti e soli i numeri dispari minori o uguali a 5001, che sono 2501.

Problema 15. Ecco un altro problema, di geometria solida, che nessuno si è sentito di affrontare ma che si prestava ad una soluzione elegante. Il punto di partenza per la soluzione è il seguente: se si congiunge il vertice della piramide con i punti in cui la sfera è tangente a due facce laterali adiacenti, le due semirette che si ottengono formano angoli congruenti con lo spigolo comune alle due facce adiacenti considerate (per dimostrarlo basta osservare che tali angoli sono simmetrici rispetto al piano passante per il centro della sfera e lo spigolo laterale in questione). Tenendo conto del fatto che questo accade per tutti i quattro spigoli laterali della piramide è poi semplice dimostrare che $\widehat{AVB}+\widehat{CVD}=\widehat{BVC}+\widehat{DVA}$. Si può quindi determinare $\widehat{DVA}$, visto che gli altri 3 angoli sono noti.

Problema 16. Questo problema è stato l'unico problema della seconda pagina (cioè quelli dopo il 10) che la maggior parte delle squadre è stata in grado di risolvere. Questo significa che la seconda pagina è stata affrontata, non saltata, e se gli altri problemi della seconda pagina non sono stati fatti è proprio perché i ragazzi non ci sono riusciti.

Problema 17. Una volta osservato che la condizione **2.** è equivalente a richiedere che i triangoli abbiano tutti gli angoli strettamente minori di 120°, il problema diventa un semplice esercizio di calcolo combinatorio.

Problema 18. Una volta che ci si sia resi conto che il punto cercato è il baricentro del tetraedro, i calcoli diventano facili. Il fatto che una sola squadra sia riuscita a risolverlo, evidenzia ancora una volta la disaffezione degli studenti per la geometria solida.

Problema 19. Ecco un problema di geometria piana camuffato da geometria solida, che quindi nessuno è riuscito a fare. Infatti, alcune semplici considerazioni portano a concludere che la posizione che massimizza l'area di ABC deve necessariamente corrispondere a quando le corde sono tese e le loro estremità libere giacciono sul soffitto. A questo punto si riesce a dimostrare che la posizione che rende massima l'area è necessariamente quella in cui P è l'ortocentro. Una volta riconosciuto ciò, il resto sono solo facili calcoli.

Problema 20. Questo era uno dei pochi problemi che ritenevo difficile anche prima di aver visto lo svolgimento della gara. L'avevo inserito allo scopo di evitare che qualche squadra terminasse la gara prima dello scadere del tempo. Solo dopo la gara ho scoperto che si è trattato di una precauzione inutile. In appendice ho riportato per esteso la sua soluzione.

© Emanuele Callegari c/o Dipartimento di Matematica - Università di Roma Tor Vergata - Tutti i diritti sono riservati
Altro materiale disponibile alla pagina: www.problemisvolti.it

Appendice: soluzione di alcuni problemi

Soluzione del Problema 5.

La risposta corretta è 252.
Per cominciare osserviamo che, se indichiamo con $MCD(m,n)$ il Massimo Comune Divisore tra i due numeri m e n, un quesito equivalente a quello proposto è il seguente:

Quanti sono i divisori di m che non dividono $MCD(m,n)$?

Poiché i divisori di $MCD(m,n)$ sono un sottoinsieme di quelli di m, basterà contare quanti sono quelli di m e quelli di $MCD(m,n)$ e poi farne la differenza.
Ricordiamo che se la scomposizione in fattori primi di un numero è

$$p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

allora il numero dei suoi divisori è

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_n + 1). \tag{1}$$

Basterà dunque trovare la scomposizione in fattori primi di m e $MCD(m,n)$.
A tale scopo osserviamo che m può essere scomposto in fattori primi attraverso la seguente scorciatoia:

$$\begin{aligned} m &= 111.333.333.111 = \\ &= 111 \cdot 1.003.003.001 = \\ &= 111 \cdot (10^9 + 3 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^3 + 1) = \\ &= 111 \cdot (10^3 + 1)^3 = \\ &= 111 \cdot 1001^3 = \\ &= 3 \cdot 37 \cdot (7 \cdot 11 \cdot 13)^3 = 3 \cdot 7^3 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 37. \end{aligned} \tag{2}$$

Inoltre ricordiamo che $MCD(m,n) = MCD(m, m-n)$ e che

$$\begin{aligned} m - n &= 111.333.333.111 - 111.333.666.222 = \\ &= 111 \cdot (1.003.003.001 - 1.003.002.006) = \\ &= 111 \cdot 995 = \\ &= 3 \cdot 37 \cdot 5 \cdot 199, \end{aligned} \tag{3}$$

da cui segue che

$$MCD(m,n) = MCD(m, m-n) = 3 \cdot 37.$$

Ricordando (1), (2) e (3), possiamo quindi concludere che i divisori di m sono $2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2$, cioè 256, ma che di essi 4 sono anche divisori di $MCD(m,n)$ e quindi di n. Di conseguenza i divisori di m che non dividono n sono 252.

Soluzione del Problema 6.

La risposta corretta è 6720.
Il quesito proposto equivale al seguente:

Qual è il volume massimo che può avere il tetraedro di vertici A, B, C e P, sapendo che $PA \leq 32$cm, $PB \leq 35$cm e $PC \leq 36$cm?

Osserviamo che allungare uno dei tre spigoli PA, PB o PC, tenendo fisse lunghezza e posizione degli altri due, aumenta il volume. Di conseguenza, il tetraedro con volume massimo andrà cercato tra quelli aventi gli spigoli che misurano esattamente 32cm, 35cm e 36cm. Di questi, quello che realizza il volume massimo è quello in cui PA, PB e PC sono mutuamente perpendicolari in P, in quanto, se si pensa il tetraedro come una piramide avente per base il triangolo APB, la base avrà area massima quando APB è rettangolo in P e l'altezza sarà massima quando CP è perpendicolare al piano su cui giace la base APB.
Quindi si ha:

$$\text{volume massimo} = \frac{(\text{area massima di } APB) \cdot (\text{altezza massima})}{3} = \frac{\frac{PA \cdot PB}{2} \cdot PC}{3} = \frac{\frac{32\text{cm} \cdot 35\text{cm}}{2} \cdot 36\text{cm}}{3} = 6720\text{cm}^3.$$

Soluzione del Problema 8.

La risposta corretta è 0.
Il modo più rapido per ottenere la soluzione è quello di basarsi sulla seguente (semplice) idea:

Quando si sovrappongono parzialmente due figure $\mathcal{F}_1$ ed $\mathcal{F}_2$, aventi la stessa area, la parte di $\mathcal{F}_1$ non contenuta in $\mathcal{F}_2$ e la parte di $\mathcal{F}_2$ non contenuta in $\mathcal{F}_1$ hanno la stessa area.

Nel nostro caso (vedi la figura **3**), basta prendere come figura $\mathcal{F}_1$ l'ottagono regolare $EFGHIJKL$ e come figura $\mathcal{F}_2$ il quadrilatero $ABCM$.

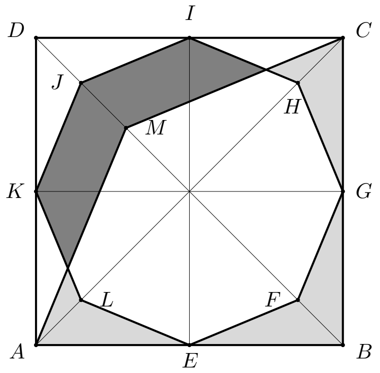

figura 3

Essi hanno banalmente la stessa area, perché per entrambi l'area è un quarto di quella dell'ottagono regolare che ha raggio uguale al lato del quadrato $ABCD$.

Soluzione del Problema 10.

La risposta corretta è 1001.

Sia ABC il triangolo equilatero di partenza e sia $\mathcal{U}$ la famiglia di tutti i triangoli che si richiede di contare, cioè la famiglia di tutti i triangoli equilateri i cui vertici stanno nell'insieme dei 78 punti evidenziati nella figura seguente:

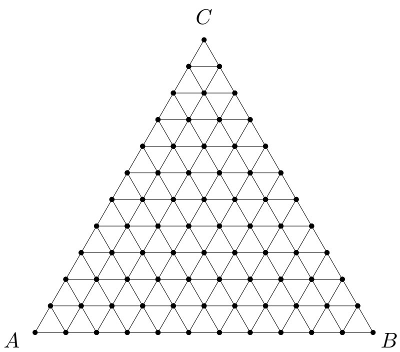

figura 4

Per nostra comodità usiamo come unità di misura ciascuno degli 11 segmentini in cui abbiamo suddiviso inizialmente i lati del triangolo ABC. Con tale unità di misura, dunque, il lato di ABC misura 11.

Sempre per essere più comodi nella nostra discussione, introduciamo la seguente notazione:

Un triangolo $A'B'C'$ verrà detto **fondamentale** *se i suoi lati $A'B'$, $B'C'$ e $C'D'$ non solo sono paralleli ad AB, BC e CA, rispettivamente, ma sono anche orientati nello stesso verso.*

Ad esempio, il triangolo $A'B'C'$ evidenziato nella figura **5** è fondamentale mentre quello evidenziato nella figura **6** non lo è.

© Emanuele Callegari c/o Dipartimento di Matematica - Università di Roma Tor Vergata - Tutti i diritti sono riservati
Altro materiale disponibile alla pagina: www.problemisvolti.it

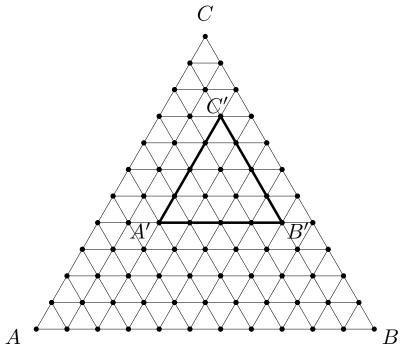

figura 5

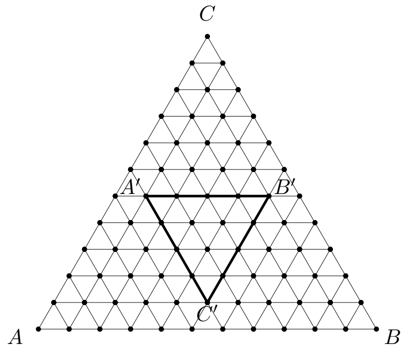

figura 6

Introduciamo a questo punto la seguente notazione:

> *Un triangolo equilatero $A'B'C'$, anche non fondamentale, verrà detto* **di tipo** k *se il più piccolo triangolo fondamentale che lo contiene ha lato* k.

Ad esempio il triangolo $A'B'C'$ della figura **6** è di tipo 8, mentre quello evidenziato nella figura **7** è di tipo 4.

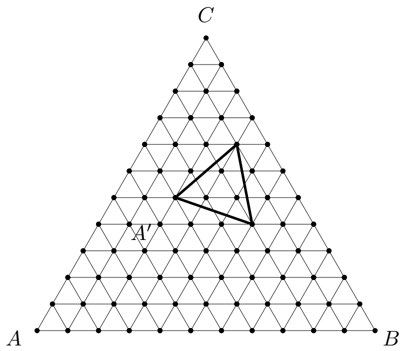

figura 7

Ovviamente, poiché ogni triangolo di $\mathcal{U}$ è di uno e un solo tipo, compreso tra 1 e 11, se con N_k indichiamo il numero di triangoli di tipo k della famiglia $\mathcal{U}$ e con N il numero totale di triangoli di $\mathcal{U}$, avremo:

$$N = N_1 + N_2 + \ldots + N_{10} + N_{11}. \tag{4}$$

Basterà dunque, per ogni $k = 1, \ldots, 11$ contare quanti sono i triangoli di $\mathcal{U}$ di tipo k.
A tale scopo osserviamo che:

> *In un triangolo fondamentale di lato k sono iscritti esattamente k triangoli di tipo k (contando anche lui stesso).*

La figura seguente evidenzia questo fatto nel caso particolare $k = 4$:

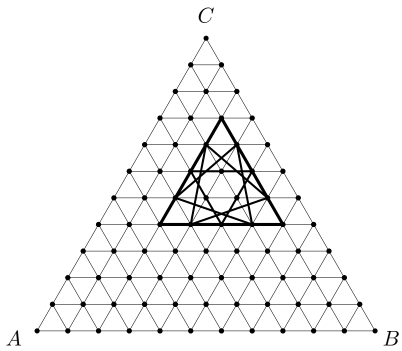

figura 8

© Emanuele Callegari c/o Dipartimento di Matematica - Università di Roma Tor Vergata - Tutti i diritti sono riservati
Altro materiale disponibile alla pagina: www.problemisvolti.it

Osserviamo inoltre che:

I triangoli fondamentali di lato k contenuti in ABC sono esattamente $1+2+3+\ldots+(12-k)$.

Per verificarlo basta contare quante sono le posizioni possibili che può occupare in ABC il vertice più in alto del triangolo fondamentale di lato k. La figura seguente mostra, nel caso particolare $k=4$, che il vertice più in alto del triangolo fondamentale di lato 4 da piazzare, può occupare esattamente $1+2+3+\ldots+8$ posizioni, che sono state evidenziate ingrossandole di più:

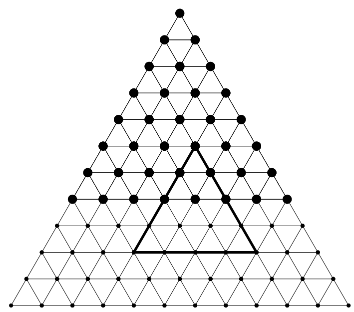

figura 9

Combinando queste ultime due considerazioni possiamo concludere che, per ogni $k=1,\ldots,11$, il numero dei triangoli di tipo k contenuti in ABC è dato da

$$N_k = k\cdot(1+2+3+\ldots+(12-k)) = k\cdot T_{12-k} = \frac{k(12-k)(13-k)}{2} \tag{5}$$

dove abbiamo usato la notazione

$$T_m = 1+2+3+\ldots+m,$$

ed abbiamo ricordato che vale la formula $T_m = \dfrac{m(m+1)}{2}$.
A questo punto da (4) e (5) segue

$$\begin{aligned} N &= 1\cdot T_{11} + 2\cdot T_{10} + \ldots + 10\cdot T_2 + 11\cdot T_1 \\ &= 1\cdot 66 + 2\cdot 55 + \ldots + 10\cdot 3 + 11\cdot 1 = 1001. \end{aligned} \tag{6}$$

Ovviamente, se i punti presi sul triangolo ABC, anziché essere 10 fossero stati molti di più, la sommatoria (6) avrebbe avuto molti termini in più e non sarebbe stato possibile calcolarla *a mano*.
In tal caso, comunque, lo studente può divertirsi a dimostrare che vale la seguente formula:

$$1\cdot T_n + 2\cdot T_{n-1} + \ldots + (n-1)\cdot T_2 + n\cdot T_1 = \binom{n+3}{4}$$

che, appunto, calcolata per $n=11$, fornisce come risultato ancora 1001.

Soluzione del Problema 11.

La risposta corretta è 999.
La risposta è conseguenza immediata del seguente:

Teorema 1.

Dato un triangolo di lati a, b e c, indichiamo con m_a, m_b ed m_c le mediane ad esso relative. Allora valgono le disuguaglianze

$$1 < \frac{a+b+c}{m_a+m_b+m_c} < \frac{4}{3}$$

Inoltre le costanti 1 *e* $\frac{4}{3}$ *sono ottimali, anzi, comunque preso un valore α, con $1<\alpha<\frac{4}{3}$, esiste sempre un triangolo tale che* $\dfrac{a+b+c}{m_a+m_b+m_c} = \alpha$.

Utilizzando tale teorema la soluzione è immediata.
Infatti da essa segue che il perimetro $a+b+c$ può assumere tutti e soli i valori che soddisfano la seguente relazione:

$$3000\text{mm} < a+b+c < 4000\text{mm}.$$

© Emanuele Callegari c/o Dipartimento di Matematica - Università di Roma Tor Vergata - Tutti i diritti sono riservati
Altro materiale disponibile alla pagina: www.problemisvolti.it

Di conseguenza, se il perimetro espresso in millimetri è intero, i casi possibili sono 999.
Per completare la soluzione del problema ci rimane dunque solo da dimostrare il teorema sopra citato:

`Dimostrazione del Teorema 1.`

`I passo`

Mostriamo che in ogni triangolo ABC vale la disuguaglianza

$$a + b + c > m_a + m_b + m_c,$$

dove usiamo le notazioni $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ ed m_a, m_b ed m_c indicano le mediane uscenti rispettivamente da A, B e C.
A tale scopo si consideri la figura seguente:

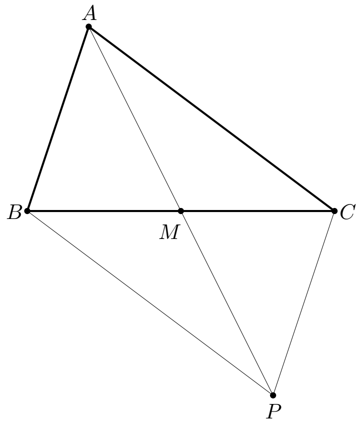

figura 10

dove M è il punto medio del lato BC e la mediana AM è stata prolungata di un segmento MP ad essa congruente.
In conseguenza a ciò si ottiene che $ABPC$ è un parallelogrammo e quindi $BP = AC$.
A questo punto, nel triangolo ABP ogni lato è minore della somma degli altri, quindi

$$AB + BP > AP.$$

Di conseguenza, ricordando che $BP = AC$ e che $AP = 2AM$, otteniamo

$$AB + AC > 2AM$$

cioè

$$a + b > 2m_c \tag{7}$$

In modo del tutto analogo si dimostra che

$$b + c > 2m_a \tag{8}$$

e che

$$c + a > 2m_b. \tag{9}$$

Sommando membro a membro (7), (8) e (9) si ottiene

$$2a + 2b + 2c > 2m_a + 2m_b + 2m_c,$$

che, dividendo ambo i membri per 2, fornisce la disuguaglianza cercata.

`II passo`

Mostriamo che in ogni triangolo ABC vale la disuguaglianza

$$a + b + c < \frac{4}{3}\left(m_a + m_b + m_c\right),$$

dove usiamo le stesse notazioni usate al primo passo.
A tale scopo si consideri la figura seguente:

© Emanuele Callegari c/o Dipartimento di Matematica - Università di Roma Tor Vergata - Tutti i diritti sono riservati

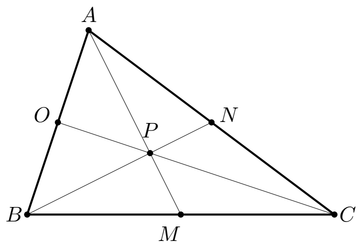

figura 11

dove M, N e O sono i punti medi dei lati e quindi P è il baricentro.
È noto che il baricentro divide ogni mediana in 2 parti di cui una è la metà dell'altra, quindi, in particolare, $BP = \frac{2}{3}BN = \frac{2}{3}m_b$ e $CP = \frac{2}{3}CO = \frac{2}{3}m_c$.
Se ora consideriamo il triangolo BCP abbiamo che

$$BC < BP + PC$$

cioè che

$$a < \frac{2}{3}m_b + \frac{2}{3}m_c \tag{10}$$

In modo del tutto analogo si dimostra che

$$b < \frac{2}{3}m_c + \frac{2}{3}m_a \tag{11}$$

e che

$$c < \frac{2}{3}m_a + \frac{2}{3}m_b \tag{12}$$

Sommando membro a membro (10), (11) e (12) si ottiene

$$a + b + c < \frac{4}{3}\left(m_a + m_b + m_c\right),$$

che è proprio la disuguaglianza cercata.

III passo

Mettendo insieme i risultati dei primi due passi otteniamo la disuguaglianza

$$1 < \frac{a + b + c}{m_a + m_b + m_c} < \frac{4}{3}$$

Adesso vogliamo far vedere che, qualsiasi valore α si prenda, purché sia strettamente compreso tra 1 e $\frac{4}{3}$, esiste sempre un triangolo tale che $\frac{a + b + c}{m_a + m_b + m_c}$ assuma quel valore.
A tale scopo prendiamo la famiglia di tutti gli infiniti triangoli isosceli aventi la base che misura 2.
Per fissare le idee, indichiamo con BC la base e con A il vertice comune ai due lati congruenti.
Se adottiamo le stesse notazioni assunte nei primi due passi della dimostrazione, indicata con h l'altezza relativa alla base BC, si ottiene subito, da semplici calcoli, che:

$$a = 2, \quad b = c = \sqrt{1 + h^2}, \quad m_a = h, \quad m_b = m_c = \frac{1}{2}\sqrt{9 + h^2}.$$

Di conseguenza

$$\frac{a + b + c}{m_a + m_b + m_c} = \frac{2 + 2\sqrt{1 + h^2}}{h + \sqrt{9 + h^2}}.$$

Per avere la tesi basta ora convincersi che, al variare di h, l'espressione

$$f(h) = \frac{2 + 2\sqrt{1 + h^2}}{h + \sqrt{9 + h^2}}$$

assume tutti i valori strettamente compresi tra 1 e $\frac{4}{3}$.
Per vedere che ci si può avvicinare a $\frac{4}{3}$ tanto quanto si vuole, pur di prendere h sufficientemente piccolo, basta osservare che, per $h = 0$, $f(h)$ assume proprio il valore $\frac{4}{3}$.
Analogamente, osservando che

$$f(h) = \frac{2 + 2\sqrt{1 + h^2}}{h + \sqrt{9 + h^2}} = \frac{\frac{2}{h} + 2\sqrt{\frac{1}{h^2} + 1}}{1 + \sqrt{\frac{1}{h^2} + 1}},$$

© Emanuele Callegari c/o Dipartimento di Matematica - Università di Roma Tor Vergata - Tutti i diritti sono riservati
Altro materiale disponibile alla pagina: www.problemisvolti.it

notiamo che, prendendo h sufficientemente grande (cioè $\frac{1}{h}$ sufficientemente piccolo), si può far avvicinare il valore di $f(h)$ a $\frac{0+2\sqrt{0+1}}{1+\sqrt{0+1}}$ (cioè a 1) tanto quanto si vuole.
Per concludere osserviamo che il valore di $f(h)$ varia *con continuità* al variare di h, quindi assume necessariamente tutti i valori compresi tra 1 e $\frac{4}{3}$, che è quanto volevamo dimostrare.
Gli studenti del V anno, che dovrebbero già conoscere il concetto di limite e di funzione continua, dovrebbero notare che non abbiamo fatto altro che osservare che $\lim_{h\to 0} f(h) = \frac{4}{3}$ e $\lim_{h\to +\infty} f(h) = 1$, dopodiché abbiamo invocato la continuità della funzione $f(h)$ per poter dire che essa assume tutti i valori intermedi tra 1 e $\frac{4}{3}$.

Soluzione del Problema 13.

La risposta corretta è 216.
Per verificarlo, una volta indicato con α l'angolo $\widehat{MOP}$ (vedi figura **12**), basterà mostrare che $\sin \widehat{HOP} = \sin 2\alpha = \frac{3}{4}$.

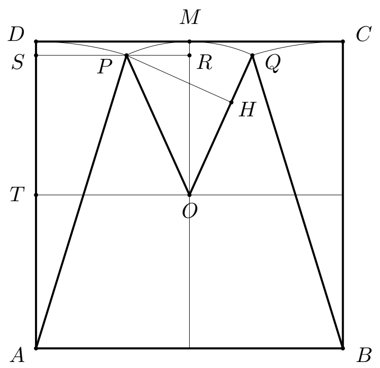

figura 12

Infatti, fatto ciò, si avrà che

$$PH = PO \cdot \sin 2\alpha = \frac{576\text{cm}}{2} \cdot \frac{3}{4} = 216\text{cm}.$$

Mostriamo dunque che $\sin 2\alpha = \frac{3}{4}$.
Se, per comodità, indichiamo con s la metà del lato del quadrato $ABCD$, abbiamo che $OP = s$ e quindi $PR = s \sin \alpha$ e $OR = TS = s \cos \alpha$.
Di conseguenza, applicando il teorema di Pitagora al triangolo PSA, si ha:

$$AS^2 + SP^2 = AP^2,$$

cioè

$$(s + s\cos\alpha)^2 + (s - s\sin\alpha)^2 = (2s)^2,$$

da cui, dividendo ambo i membri per s^2 e sviluppando i quadrati, si ottiene:

$$1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha + 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha = 4.$$

Infine, ricordando che $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ e semplificando, si ottiene

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

A questo punto, elevando ambo i membri al quadrato e ricordando ancora che $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, si ottiene:

$$1 - 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4},$$

cioè

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{4}.$$

Per concludere basta ora ricordare che

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

© Emanuele Callegari c/o Dipartimento di Matematica - Università di Roma Tor Vergata - Tutti i diritti sono riservati
Altro materiale disponibile alla pagina: www.problemisvolti.it

Soluzione del Problema 20.

La risposta corretta è 105.
Dobbiamo dimostrare due cose: la prima è che per $n = 105$ la disuguaglianza funziona, la seconda è che per $n < 105$ esistono dei valori di a e b che la rendono falsa.

I passo

Premettiamo la seguente osservazione: se α e β sono due numeri reali non negativi tali che $\alpha + \beta = 2$, per ogni $x > 0$ e per ogni $y > 0$ vale la disuguaglianza

$$\frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2} \leq 1 \tag{13}$$

Infatti, dal fatto che $\alpha + \beta = 2$ segue che

$$x^2 + y^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\alpha+\beta} = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^\alpha \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^\beta \geq x^\alpha y^\beta,$$

da cui segue (13).
Mostriamo che per $n = 105$ la disuguaglianza di partenza funziona.
Infatti, premesso che se a e b sono entrambi nulli la disuguaglianza è ovvia, in caso contrario si ha:

$$\frac{a^{105}b^{12}}{(a^{90} + b^{72}) \cdot (a^{30} + b^{40})} = \frac{a^{75}b^{12}}{a^{90} + b^{72}} \cdot \frac{a^{30}}{a^{30} + b^{40}} = \frac{\left(a^{45}\right)^{\frac{5}{3}} \left(b^{36}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{45}\right)^2 + \left(b^{36}\right)^2} \cdot \frac{a^{30}}{a^{30} + b^{40}} \leq 1 \cdot 1 = 1, \tag{14}$$

dove la disuguaglianza

$$\frac{\left(a^{45}\right)^{\frac{5}{3}} \left(b^{36}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(a^{45}\right)^2 + \left(b^{36}\right)^2} \leq 1$$

segue dalla (13), mentre la disuguaglianza

$$\frac{a^{30}}{a^{30} + b^{40}} \leq 1$$

segue in modo ovvio dal fatto che il numeratore è minore o uguale al denominatore.
Dalla (14) segue banalmente che

$$a^{105}b^{12} \leq \left(a^{90} + b^{72}\right) \cdot \left(a^{30} + b^{40}\right)$$

che è quanto volevamo dimostrare.

II passo

Mostriamo che se $n < 105$ esistono dei valori di a e b per i quali la disuguaglianza non vale.
Se infatti ci restringiamo a quei valori di a e b tali che $a^{90} = b^{72}$, cioè tali che $b = a^{\frac{5}{4}}$ la disuguaglianza da verificare diventa

$$a^n \cdot \left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{12} \leq \left(a^{90} + \left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{72}\right) \cdot \left(a^{30} + \left(a^{\frac{5}{4}}\right)^{40}\right) \tag{15}$$

cioè

$$a^{n+15} \leq \left(a^{90} + a^{90}\right) \cdot \left(a^{30} + a^{50}\right)$$

cioè

$$a^{n+15} \leq 2a^{120} + 2a^{140}$$

cioè

$$a^{n-105} \leq 2 + 2a^{20} \tag{16}$$

A questo punto si nota subito che quando $n < 105$, l'esponente di a al primo membro è negativo e, di conseguenza, il primo membro può essere reso arbitrariamente grande, pur di scegliere a sufficientemente piccolo. Al contrario il secondo membro, è sempre minore o uguale a 4, visto che $a^2 \leq a^2 + b^2 \leq 1$ e quindi anche $a^{20} \leq 1$. Ciò significa che, se $n < 105$, quando a è molto piccolo la (16) (e quindi anche la (15)) non può essere soddisfatta.
Quindi $n = 105$ è il più piccolo valore di n che rende sempre vera la disuguaglianza assegnata.

© Emanuele Callegari c/o Dipartimento di Matematica - Università di Roma Tor Vergata - Tutti i diritti sono riservati
Altro materiale disponibile alla pagina: www.problemisvolti.it