Progetto Olimpiadi della Matematica

Roma, 31 Marzo 2011 - Università di Roma Tor Vergata

Gara a Squadre di Secondo Livello
IV edizione

(valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico)

1. L'associazione *"Togli il Medico di Torno"* ha le seguenti regole:

a. ogni membro nel giorno in cui si iscrive non mangia mele, poi, a partire dal giorno successivo alla sua iscrizione, mangia esattamente una mela al giorno;
b. ogni membro, a partire dal giorno successivo alla sua iscrizione, porta ogni giorno una nuova persona ad iscriversi;
c. nessuno, a parte il primo socio, può iscriversi se non viene accompagnato da qualcuno che sia già socio almeno dal giorno prima.

L'associazione nasce il primo gennaio del 2011, quando il signor Fazio la fonda e si iscrive come primo socio, e da allora la regola viene rispettata alla lettera.
Dire quante mele sono state mangiate complessivamente dai soci tra il 2 e il 12 gennaio, compresi.

2. Un papà ha 9 caramelle (3 bianche, 3 rosse e 3 verdi) e vuole distribuirle alle sue 7 figliole in modo che ciascuna ne riceva almeno una, ma che a Roberta, la sua figliola prediletta, ne tocchi almeno una per ogni colore.
In quanti modi diversi può farlo?

3. Qual è il più grande numero intero positivo n tale che n^2 divide $123.246.124^2 - 123.246.122^2$?

4. Nel quadrato $ABCD$ siano P il punto medio di CD e Q il punto medio di DA.

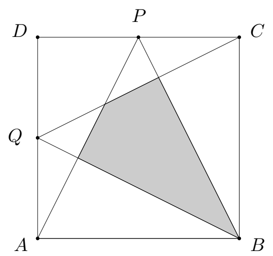

figura 1

Se l'area del quadrato è 14400cm^2, quanto misura (in cm^2) l'area dell'intersezione tra i triangoli ABP e BCQ, evidenziata in grigio in figura?

5. Quanti sono i diversi rettangoli aventi i lati la cui misura, espressa in centimetri, è intera e l'area di 324000cm^2? (N.B. due rettangoli vanno considerati uguali, e quindi contati una volta sola, se hanno gli stessi lati, senza tener conto di quale sia la base e quale l'altezza)

6. La nave *Saggezza*, a causa di un guasto, sta andando alla deriva con 21 persone a bordo, allontanandosi con moto rettilineo uniforme dalla piattaforma galleggiante *Olimpia* alla velocità costante di 10 miglia all'ora. Sulla piattaforma *Olimpia* c'è un solo motoscafo, la cui velocità massima è di 20 miglia all'ora e che può trasportare solo 3 persone oltre al pilota.
Nel momento in cui il motoscafo parte per il primo dei 7 viaggi di salvataggio che dovrà fare, la distanza tra la nave *Saggezza* e la piattaforma *Olimpia* è di 20 miglia.
Quante ore passeranno prima che tutti i 21 passeggeri possano arrivare in salvo sulla piattaforma *Olimpia*?

7. Quanti sono i diversi rettangoli aventi il perimetro che, espresso in centimetri, è un numero intero di al massimo 3 cifre, mentre l'area è di 308cm^2? (N.B. due rettangoli vanno considerati uguali, e quindi contati una volta sola, se hanno gli stessi lati, senza tener conto di quale sia la base e quale l'altezza)

8. Il prof. Peirone, quando è ubriaco, non cammina ondeggiando in modo casuale come tutti i comuni mortali, bensì spiraleggia nel modo seguente:

a) fa un passo in avanti;
b) gira a sinistra (compiendo una rotazione di 90°) poi fa 2 passi;
c) gira ancora di 90° a sinistra poi fa 3 passi;
d) gira ancora di 90° a sinistra poi fa 4 passi;
e . . .) finché non gli è passata la sbornia continua a girare 90° a sinistra e a fare un percorso rettilineo lungo un passo in più di quello che ha fatto prima di girare.

La sbornia gli passa dopo 2011 passi.
Qual è, a quel punto, il quadrato della sua distanza dal punto di partenza (misurata in passi)?

9. Trovare quell'unico numero α che ha la seguente proprietà: *non esiste alcun polinomio di terzo grado* $p(x)$ *tale che* $p(31) = \alpha$, $p(2) = 11$, $p(11) = 2$ *e* $p(52) = 2011$.

10. Trovare il più grande intero positivo n che rende falsa la seguente affermazione: *"preso comunque un insieme* $\mathcal{A}$ *di* n *numeri interi strettamente positivi distinti, esiste sempre un sottoinsieme non vuoto di* $\mathcal{A}$ *(considerando come sottoinsieme di* $\mathcal{A}$ *anche* $\mathcal{A}$ *stesso) tale che la somma dei numeri che appartengono al sottoinsieme sia divisibile per* 2011.

11. Dopo le ultime catastrofi che lo hanno colpito, il pianeta *Talikus* non ha più forma sferica: è diventato un doppio cono, cioè l'unione di due coni identici, incollati per le basi, aventi ciascuno la superficie laterale e l'area di base che, espresse in Km^2, valgono rispettivamente è 4563π e è 1521π.
La capretta *Gemmina*, ultima superstite del pianeta, è legata a una lunga corda che, all'altro capo è fissata ad un punto dell'equatore, cioè del bordo della base comune ai due coni.
Qual è, espressa in chilometri, la minima lunghezza che tale corda deve avere, affinché *Gemmina* sia in grado di raggiungere ogni punto del pianeta?

12. In un quadrilatero convesso $ABCD$ l'angolo interno in B è di 105°. Detti P, Q, R e S i punti medi, rispettivamente, dei lati AB, BC, CD e DA, indichiamo con T l'intersezione dei segmenti PR e QS.

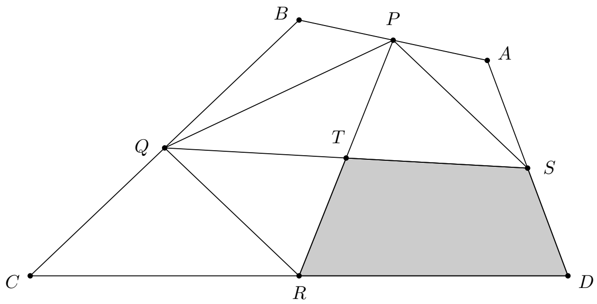

figura 2

Sapendo che i triangoli APS, BQP e CQR hanno aree rispettivamente di 1640cm^2, 2460cm^2 e 5740cm^2, determinare l'area (sempre espressa in cm^2) di $DSTR$.

13. Luca e Claudia si sfidano ad un gioco. Sul tavolo ci sono due pile di monete, la pila **A** contenente 2011 monete e la pila **B** che ne contiene 512. Le mosse ammissibili sono di due tipi:

a. togliere dalla pila **B** almeno una moneta (eventualmente anche tutte);
b. togliere dalla pila **A** almeno una moneta (eventualmente anche tutte) e, simultaneamente a questo, se la pila **A** rimanesse con meno monete della pila **B**, togliere monete anche dalla pila **B** fino a renderla uguale alla **A**.

I due giocatori muovono a turno e perde chi fa l'ultima mossa.
Inizia Claudia.
Se per lei non esiste una strategia vincente, indicare come risposta '0'.
Se invece esiste, supponendo che Claudia muova in modo da vincere, dire qual è il massimo numero di monete che toglierà dal tavolo con la prima mossa.

14. Quanti sono i sistemi del tipo

$$\begin{cases} x^m y^n = 1 \\ x^p y^q = 2011 \end{cases}$$

(con m, n, p e q interi strettamente positivi) che hanno grado 144 e non hanno soluzioni reali?
(si ricordi che il grado di un sistema è il prodotto dei gradi delle equazioni che lo compongono)

15. Sia $p(x)$ un polinomio di grado 2008 tale che $p(3) = p(4) = \ldots = p(2010) = 7$, mentre $p(2011) = \frac{50}{7}$.
Calcolare la somma dei coefficienti dei termini di $p(x)$.

16. Nel parallelogrammo $ABCD$ l'angolo interno in C è di 60°. Si prendano un punto P sul lato AD tale che $4AP = PD$ e un punto Q sul lato DC in modo che $4DQ = QC$. Indichiamo infine con R l'intersezione dei segmenti AQ e BP.

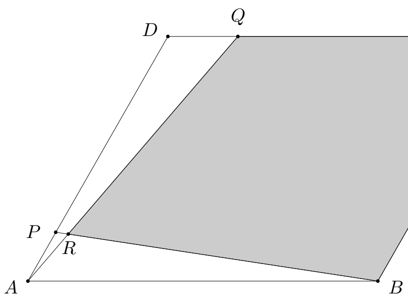

figura 3

Se l'area di $BCQR$ è 3553cm^2, quanto vale (sempre in cm^2) l'area del parallelogrammo $ABCD$?

17. Sia $p(x)$ un polinomio di grado 15 avente il coefficiente del termine di grado massimo uguale a 1 e tale che $p(\pm k) = k^2$ per ogni $k = 0, 1, \ldots, 7$.
Dire quante sono le cifre della parte intera di $p(8) - p(-8)$.

18. Per ogni intero positivo n indichiamo con M_n il Massimo Comune Divisore tra n^2 ed $n^2 + 3n + 50$.
Qual è, al variare di n, il massimo valore che M_n può assumere?

19. In una scacchiera 8×8 le righe sono numerate da 1 a 8 e le colonne sono contrassegnate con le lettere che vanno dalla a alla h (esattamente come nel gioco degli scacchi).
Una pulce, situata inizialmente nella casella $b2$, si sposta saltando: i salti ammessi sono solo quelli tra due caselle adiacenti, cioè due caselle distinte aventi un lato in comune.
Determinare quanti sono i percorsi che portano la pulce dalla casella $b2$ alla casella $g7$ che sono composti **esattamente da 12 salti** e che non passano mai due volte per la stessa casella.

20. Una parola $\mathcal{P}$ verrà detta **buona** se ha le seguenti proprietà:

a. contiene solo le lettere **A**, **B**, **C** e **D**;
b. ciascuna delle lettere **A**, **B**, **C** e **D** compare in $\mathcal{P}$ almeno una volta;
c. due lettere consecutive di $\mathcal{P}$ non sono mai uguali.

Quante sono le parole **buone** di 8 lettere?

Risposte e Statistiche

Nella tabella seguente riportiamo, per ogni problema, il risultato, il numero di risposte giuste e il numero complessivo di risposte che ha ricevuro durante la gara. Ricordiamo che, in base al regolamento, ogni squadra poteva continuare a tentare di rispondere a un problema quanto voleva, quindi è successo spesso che una squadra abbia dato diverse risposte sbagliate ad un problema, prima di dare la risposta giusta.

	risultato	giuste	totali
Problema 1 :	2047	18	32
Problema 2 :	90	14	31
Problema 3 :	2002	8	23
Problema 4 :	3840	7	21
Problema 5 :	60	10	12
Problema 6 :	4372	12	23
Problema 7 :	929	1	25
Problema 8 :	1753	5	27
Problema 9 :	562	1	1
Problema 10 :	2010	1	5
Problema 11 :	117	4	4
Problema 12 :	8610	0	1
Problema 13 :	1498	5	24
Problema 14 :	35	0	0
Problema 15 :	294	1	1
Problema 16 :	4420	0	0
Problema 17 :	13	1	1
Problema 18 :	2500	1	5
Problema 19 :	2520	1	12
Problema 20 :	7224	0	10