Università di Roma la Sapienza - Università di Roma Tor Vergata - Università di Roma Tre

Progetto Olimpiadi della Matematica

Roma, 22 Marzo 2012 - Università di Roma Tor Vergata

# Gara a Squadre di Secondo Livello
# V edizione

(valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico)

**1.** Un quadrato $ABCD$ è suddiviso in 4 parti da due rette $r$ e $s$, dove $r$ è parallela alla diagonale $AC$ ed $s$ è parallela alla diagonale $BD$. Delle 4 parti in cui il quadrato è suddiviso dalle due rette, sappiamo che le 3 più piccole hanno aree, rispettivamente, $81\text{cm}^2$, $257\text{cm}^2$ e $431\text{cm}^2$.
Qual è l'area della parte rimanente?

**2.** Sia $\mathcal{S}$ la somma di tutti i numeri di 3 cifre aventi la cifra delle decine uguale a 3. Quanto vale $\frac{\mathcal{S}}{9}$?

**3.** Nel triangolo $ABC$ indichiamo con $P$ il punto interno che dista più di tutti gli altri dal bordo, e con $H$ la sua proiezione su $BC$. Sapendo che le misure dei lati, espresse in centimetri, sono rispettivamente $AB = 8824$, $BC = 10123$ e $CA = 9075$, trovare la misura, sempre in centimetri, di $CH$.

**4.** La superficie interna di una cavità, perfettamente sferica, viene lucidata a specchio, sicchè ogni fascio di luce, generato al suo interno, continua a rimbalzare sulla parete all'infinito, descrivendo una linea spezzata.
Da un punto $P$ della parete parte, verso l'interno, un fascio di luce, che forma un angolo di $59°$ con il segmento che unisce $P$ al centro della sfera.
Dopo un certo numero di rimbalzi, il fascio di luce colpisce di nuovo il punto $P$.
Da quanti segmenti è costituita la traiettoria del fascio di luce, da quando parte da $P$ fino a quando ritorna in $P$ per la prima volta?

**5.** Data nello spazio una retta $t$ e un punto $P$ su di essa, si considerino due coni circolari retti aventi entrambi $P$ come vertice e $t$ come asse di simmetria. Supponiamo inoltre che i due coni siano omotetici rispetto a $P$ e che $P$ sia l'unico punto che hanno in comune. Sappiamo, infine, che i volumi dei due coni sono, rispettivamente $132\text{cm}^3$ e $1056\text{cm}^3$ e che la somma delle loro altezze, espressa in centimetri è intera.
Determinare, in $\text{cm}^3$, il volume del tronco di cono che ha per basi le basi dei due coni. (se si ritiene che i dati non siano sufficienti a determinare il volume richiesto indicare come risposta 0)

**6.** Dire quanti sono i quadrati perfetti che dividono 12.345.654.321 (contando eventualmente anche 1 e il numero stesso).

**7.** Quanti sono i parallelepipedi rettangoli con spigoli di lunghezza intera e superficie totale minore o uguale a 50. (due parallelepipedi congruenti, cioè sovrapponibili con un movimento rigido, vanno considerati uguali e quindi contati una volta sola)

**8.** Quanti sono i possibili valori interi positivi che può assumere il volume di un parallelepipedo rettangolo che ha la superficie totale uguale a 156?

**9.** Il piano di un tavolo da biliardo, anziché avere la solita forma rettangolare, è un triangolo isoscele $ABC$, di base $AB$, avente le seguenti proprietà:

**a.** la misura dell'angolo interno in $C$, espressa in gradi, è intera;
**b.** è possibile scagliare la palla da biliardo da un punto della base $AB$ in modo da farla rimbalzare 8 volte sui lati $CA$ e $CB$ (cioè 4 volte su ciascun lato) prima che torni a rimbalzare sul lato $AB$.

Qual è l'ampiezza massima che può avere l'angolo interno in $C$?

**10.** In un tetraedro di vertici $A$, $B$, $C$ e $D$, le misure degli spigoli, espresse in centimetri, sono $AB = 120$, $BC = 32$, $CA = 104$, $BD = DC = 27$ e $AD = 123$.
Un samurai getta in aria il tetraedro e, con un colpo di spada, lo taglia in due parti, entrambe di volume non nullo, in modo che la sezione che le separa sia un triangolo la cui area $S$, espressa in $\text{cm}^2$, sia un numero intero.
Quanti diversi valori può assumere $S$?

**11.** Dire quanti sono i numeri di 10 cifre (scritti ovviamente in base 10) che hanno le seguenti proprietà:

**a.** non contengono le cifre da 0 a 4;
**b.** le cifre che occupano, nel numero, 4 posizioni consecutive sono sempre tutte diverse.

**12.** Trovare le 4 cifre più basse di $101 + 101^2 + 101^3 + \ldots + 101^{1111}$.

**13.** Una pulce salta tra i 5 vertici di un pentagono regolare, usando la seguente regola: ogni volta che fa un salto sceglie come punto di arrivo, ciascuno con ugual probabilità, uno dei due vertici più distanti da quello in cui si trova. Qual è la probabilità $p$ che dopo 14 salti la pulce si trovi ancora nel vertice da cui è partita? (Indicare come risposta il numero intero che sta al numeratore della frazione che rappresenta $p$, ridotta ai minimi termini)

**14.** Trovare $n$ intero positivo in modo che per ogni quaterna di numeri reali $(x, y, z, w)$, non tutti nulli, si abbia:

$$\frac{x^{35}y^{15}z^{24}w^{n}}{x^{84}+y^{180}+z^{120}+w^{440}} \leq 2012$$

(Se non ce ne fosse alcuno o se ce ne fosse più di uno, indicare come risposta 0).

**15.** Le pedine della dama si muovono sulla scacchiera secondo la seguente regola: ogni mossa consiste in un solo passo, in avanti, spostandosi in diagonale a destra o a sinistra. Quando la pedina, continuando ad avanzare, arriva all'altro lato della scacchiera, cessa di esistere e si trasforma in *damone*.
Immaginiamo che una pedina si trovi nell'angolo in basso a destra di una scacchiera $16 \times 16$. Con quanti percorsi diversi può andare a trasformarsi in *damone*, rimanendo però sempre nelle prime 4 colonne della scacchiera?

**16.** Sono dati 4 punti $A$, $B$, $C$ e $V$ nello spazio.
Sappiamo che:

**a**. $A$, $B$, $C$ e $V$ non giacciono sullo stesso piano;
**b**. la misura di $AC$ espressa in centimetri è intera;
**c**. le misure degli altri segmenti, espresse in centimetri, sono: $VA = 52$, $VB = 65$, $VC = 60$, $AB = 39$ e $BC = 25$.

Quanti sono i possibili valori che può assumere $AC$?

**17.** Un polinomio $p(x)$ ha un certo grado $n > 1$ (che non è noto) ed è dotato delle seguenti proprietà:

**a**. il coefficiente del termine di grado $n$ è $\frac{1}{144}$;

**b**. per ogni numero reale $a$, le espressioni $(a + 2019) \cdot p(a - 2)$ e $(a + 3) \cdot p(a + 5)$ forniscono come risultato lo stesso valore.

Qual è il coefficiente del termine di grado $n - 1$?

**18.** Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei punti del piano aventi entrambe le coordinate intere.
Una pulce salta da un punto all'altro dell'insieme $\mathcal{A}$ partendo dall'origine e compiendo sempre balzi lunghi, in linea d'aria, esattamente $\sqrt{74}$.
Qual è il minimo numero di balzi che gli occorrono per arrivare in $(1, 1)$?

**19.** In una delle due caselle centrali di una scacchiera $4 \times 3$, si trova un cavallo (del gioco degli scacchi). Indichiamo con $N$ il numero dei percorsi lunghi 16 mosse che partono dalla casella in cui si trova e terminano in una delle due caselle centrali della scacchiera.
Dire quanto vale $\frac{N}{18}$.

**20.** Sia $N$ il numero di modi diversi in cui si possono inserire i numeri interi da 1 a 30 nella seguente tabella:

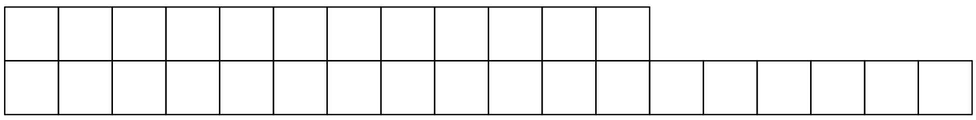

figura 1

in modo che ogni casella contenga un numero diverso e che il numero contenuto in ciascuna casella sia maggiore sia di quello che gli sta immediatamente a sinistra sia di quello che gli sta sotto.
Dire quanto vale $\frac{N}{29 \cdot 23 \cdot 7}$.

# Risposte e Statistiche

Nella tabella seguente, per ogni problema, riportiamo, nell'ordine, il risultato, il numero di squadre che l'ha scelto come jolly, il numero di risposte giuste e il numero complessivo di risposte che ha ricevuro durante la gara che, ricordiamo, ha coinvolto 18 squadre.
Ricordiamo che, in base al regolamento, ogni squadra poteva continuare a tentare di rispondere a un problema quanto voleva, quindi è successo spesso che una squadra abbia dato diverse risposte sbagliate ad un problema, prima di dare la risposta giusta.

| | | risultato | jolly | giuste | totali |
|---|---|---|---|---|---|
| Problema 1 | : | 831 | 1 | 13 | 20 |
| Problema 2 | : | 5345 | 6 | 18 | 22 |
| Problema 3 | : | 5187 | 0 | 5 | 5 |
| Problema 4 | : | 180 | 0 | 5 | 8 |
| Problema 5 | : | 2772 | 0 | 3 | 8 |
| Problema 6 | : | 32 | 1 | 13 | 19 |
| Problema 7 | : | 27 | 0 | 4 | 16 |
| Problema 8 | : | 132 | 0 | 1 | 1 |
| Problema 9 | : | 25 | 0 | 2 | 6 |
| Problema 10 | : | 1619 | 0 | 2 | 2 |
| Problema 11 | : | 7680 | 1 | 15 | 17 |
| Problema 12 | : | 2711 | 4 | 14 | 23 |
| Problema 13 | : | 1807 | 1 | 6 | 13 |
| Problema 14 | : | 132 | 0 | 0 | 1 |
| Problema 15 | : | 987 | 0 | 16 | 29 |
| Problema 16 | : | 39 | 2 | 2 | 12 |
| Problema 17 | : | 2019 | 0 | 2 | 3 |
| Problema 18 | : | 7 | 0 | 5 | 11 |
| Problema 19 | : | 6163 | 1 | 0 | 6 |
| Problema 20 | : | 6825 | 1 | 0 | 1 |