Progetto Olimpiadi della Matematica

Roma, 25 Marzo 2013 - Università di Roma Tor Vergata

Gara a Squadre di Secondo Livello
VI edizione

(valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico)

1. Nella figura seguente i 3 quadrati hanno il lato di 35 cm.

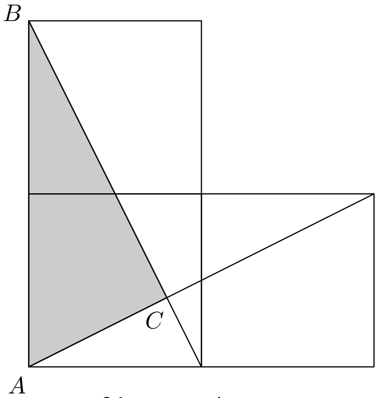

figura 1

Quanto vale, in cm^2, l'area del triangolo ABC?

2. L'enorme piramide dedicata al dio *Bunga* ha per base un quadrato $ABCD$ col lato di 2013 metri e i quattro spigoli laterali VA, VB, VC e VD che pure misurano 2013 metri. Uno scarafaggio si trova inizialmente nel baricentro della faccia VAB e vuole spostarsi nel baricentro della faccia opposta VCD camminando sulla superficie della piramide. Qual è, espressa in metri, la minima lunghezza del suo percorso?

3. Calcolare la parte intera di $\log_2(3) \cdot \log_3(4) \cdot \log_4(5) \cdot \log_5(6) \cdot \ldots \cdot \log_{8191}(8192)$.

4. Un'isola ha la forma di poligono convesso (ma irregolare) di 2013 lati e le sue coste sono lunghe, complessivamente, 75 Km.
Qual è l'area A della parte di mare che dista dalla costa non più di 10 Km? (Indicare nella risposta la parte intera di A; se si ritiene che i dati forniti siano insufficienti indicare come risposta 0)

5. Quante sono le frazioni ridotte ai minimi termini e con denominatore positivo tali che il prodotto tra numeratore e denominatore è $2^{12} - 1$? (Si ricorda che un numero intero va considerato una frazione con denominatore 1)

6. Detti $n = 600!$ e $m = 177! \cdot 313! \cdot 111!$ trovare il resto della divisione tra n e m. (Se tale resto fosse maggiore di 9999, indicare come risposta 9999)

7. Sia S il risultato che si ottiene calcolando la seguente somma:

$$7 + 97 + 997 + 9997 + 99997 + \ldots + \overbrace{99\ldots9}^{100}7.$$

Qual è la somma delle cifre di S?

8. Qual è il più grande numero intero positivo $n \leq 9999$ tale che il polinomio $x^4 + n$ si può scomporre come prodotto di due polinomi di secondo grado a coefficienti interi?

9. L'isola *Kenoncè* è una monarchia costituzionale. Alle ultime elezioni i tre partiti più votati sono stati, nell'ordine, il Partito dei Cavalieri, il Partito dei Furfanti e il Partito dei Buffoni, mentre gli altri partiti hanno ricevuto pochi consensi. La legge comunque stabilisce che il Re, dopo aver assegnato le cariche di governo al partito più votato, assegni i seggi in parlamento a sua discrezione, rispettando solo i seguenti vincoli:

1. I seggi da assegnare sono 100.
2. Solo i 3 partiti più votati possono ricevere dei seggi.
3. Al secondo partito va garantito almeno un seggio.
4. Al terzo partito non possono essere assegnati più seggi che al secondo.

In particolare si noti che, se volesse, il Re potrebbe anche assegnare tutti i 100 seggi al secondo partito.
Quanti sono i modi diversi in cui il Re può ripartire i 100 seggi tra i 3 partiti?

10. Il pianeta *Strano* ha la forma di un prisma regolare con basi a forma di dodecagono regolare. L'unico abitante si diverte (!!) a percorrere senza sosta il pianeta saltando da una faccia all'altra (purché i salti avvengano sempre tra facce adiacenti, cioè con uno spigolo in comune). Quanti sono i possibili percorsi diversi, lunghi 4 salti, la cui faccia di partenza non sia una faccia laterale del prisma?

11. Trovare un intero positivo n che non contenga fattori primi maggiori di 3 e tale che la somma di tutti i suoi divisori positivi, compresi 1 e n, sia 1815. (Se non ci fosse alcun intero n soddisfacente le proprietà richieste, indicare come risposta 0; se ce ne fosse più di uno, indicare come risposta 9999.)

12. Qual è il più grande numero intero che si può scrivere come prodotto di numeri interi positivi la cui somma sia 22?

13. Del tetraedro $ABCD$ sappiamo che $AB = 1720\,\mathrm{mm}$, $AC = 2125\,\mathrm{mm}$ e $AD = 2280\,\mathrm{mm}$. Sappiamo inoltre che la faccia BCD ha perimetro $6250\,\mathrm{mm}$ e che esiste una sfera tangente a tutti e 6 gli spigoli del tetraedro.
Quanto vale, in millimetri, il raggio della circonferenza inscritta nella faccia BCD?

14. In quanti modi si possono mettere in fila tutti i numeri da 1 a 11 in modo che valga la seguente proprietà: *comunque si prendano* 3 *posizioni consecutive della fila, la somma dei* 3 *numeri che le occupano è divisibile per* 3.

15. Quanti sono i numeri interi positivi n non maggiori di 400 che hanno la seguente proprietà: *il prodotto di tutti i divisori di n, compreso anche n stesso, è uguale a n^3.*

16. Sia dato un rombo $ABCD$ con $AB = 120\,\mathrm{cm}$ e $\widehat{DAB} = 30°$.
Un punto P interno al rombo verrà detto **buono** se esiste un triangolo di area $3600\,\mathrm{cm}^2$, tutto contenuto nel rombo e avente P come baricentro. Un punto Q verrà invece detto **bello** se è il punto medio di un segmento avente per estremi 2 punti buoni.
Qual è l'area, espressa in cm^2 della figura $\mathcal{F}$ costituita da tutti e soli i punti belli?

17. Una pulce salta tra un vertice e l'altro di una piramide regolare avente per base un poligono di 2013 lati. Inizialmente si trova sul vertice che non appartiene alla base. Ad ogni salto sceglie come destinazione un vertice a caso (con ugual probabilità) tra tutti i vertici che sono collegati da uno spigolo a quello in cui si trova.
Sia p il numero decimale che rappresenta la probabilità che dopo 2013 salti la pulce non sia nel vertice da cui è partita. Indicare come risposta, nell'ordine, le prime 4 cifre decimali di p.

18. Sia U l'insieme dei numeri interi positivi e non maggiori di 50. Sia A un sottoinsieme di U con la seguente proprietà: *se $n \in A$ allora $2n \notin A$.*
Qual è il massimo numero di elementi che può avere A?

19. Trovare il più piccolo n intero positivo per il quale si abbia:

$$\frac{abc^n}{(a^{100}+b^{100}+c^{4000})\,(a^{100}+b^{4000}+c^{100})\,(a^{4000}+b^{100}+c^{100})} \leq 2013$$

per ogni terna di numeri reali (a, b, c), non tutti nulli, tali che $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$ e $|c| \leq 1$.

20. Su un tavolo ci sono m monete d'oro e n d'argento, con $n \geq 0$, $m \geq 0$ e $m + n \leq 2013$. Claudia e Luca giocano con le seguenti regole:

1. muovono a turno, cominciando da Claudia;
2. le mosse di Luca consistono nel togliere dal tavolo da 1 a 6 monete, a sua discrezione, del metallo che preferisce;
3. le mosse di Claudia consistono nel togliere dal tavolo da 1 a 8 monete, a sua discrezione, ma in modo che tra le monete tolte non ce ne siano mai più di 4 dello stesso metallo;
4. perde chi si ritrova a dover muovere col tavolo vuoto.

Quante sono le coppie (m, n) tali che, cominciando a giocare con m monete d'oro e n d'argento, Claudia è sicura di poter vincere, qualsiasi siano le contromosse di Luca?

Risultati dei problemi

$\boxed{\texttt{Soluzione del Problema 1.}}$

La risposta corretta è 980.

$\boxed{\texttt{Soluzione del Problema 2.}}$

La risposta corretta è 2013.

$\boxed{\texttt{Soluzione del Problema 3.}}$

La risposta corretta è 13.

$\boxed{\texttt{Soluzione del Problema 4.}}$

La risposta corretta è 1064.

$\boxed{\texttt{Soluzione del Problema 5.}}$

La risposta corretta è 16.

$\boxed{\texttt{Soluzione del Problema 6.}}$

La risposta corretta è 0.

$\boxed{\texttt{Soluzione del Problema 7.}}$

La risposta corretta è 113.

$\boxed{\texttt{Soluzione del Problema 8.}}$

La risposta corretta è 9604.

$\boxed{\texttt{Soluzione del Problema 9.}}$

La risposta corretta è 2600.

$\boxed{\texttt{Soluzione del Problema 10.}}$

La risposta corretta è 3840.

$\boxed{\texttt{Soluzione del Problema 11.}}$

La risposta corretta è 648.

Soluzione del Problema 12.

La risposta corretta è 2916.

Soluzione del Problema 13.

La risposta corretta è 576.

Soluzione del Problema 14.

La risposta corretta è 6912.

Soluzione del Problema 15.

La risposta corretta è 51.

Soluzione del Problema 16.

La risposta corretta è 800.

Soluzione del Problema 17.

La risposta corretta è 7500.

Soluzione del Problema 18.

La risposta corretta è 33.

Soluzione del Problema 19.

La risposta corretta è 4120.

Soluzione del Problema 20.

La risposta corretta è 56.