Progetto Olimpiadi della Matematica

Roma, 27 Marzo 2014 - Università di Roma Tor Vergata

Gara a Squadre di Secondo Livello
VII edizione

(valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico)

1. Di una sequenza di numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sappiamo che $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt[7]{7}$ e che ciascuno dei successivi è il prodotto dei due che lo precedono. Quanto vale a_9?

2. È dato un triangolo equilatero ABC col lato di 2014 cm e un cerchio Γ centrato in A con l'area di 11340 cm^2. Qual è (espressa in cm^2) l'area del cerchio più grande contenuto sia in Γ che in ABC.

3. In un ottagono regolare $ABCDEFGH$ si tracciano tutte le diagonali che sono parallele al lato AB o al lato CD. In tal modo l'ottagono risulta suddiviso in 9 zone. Sapendo che l'area della più grande è 2014m^2, dire quanto vale (sempre espressa in m^2) la somma delle aree delle 4 zone più piccole.

4. In quanti modi diversi si può scrivere 30030 come prodotto di 5 numeri interi, positivi o negativi, diversi da 1 e -1?

5. Dato un dodecagono regolare di vertici $P_1P_2P_3 \ldots P_{12}$, si consideri il quadrato ottenuto congiungendo i vertici $P_1P_4P_7P_{10}$. Sapendo che l'area complessiva della parte di piano contenuta nel dodecagono ma esterna al quadrato è 2014cm^2, dire quanto vale in cm^2 l'area del quadrato.

6. Il parallelogrammo $ABCD$ ha area 7840m^2 e perimetro 2014m. Sappiamo inoltre che le diagonali si intersecano formando 2 angoli di 60° e 2 angoli di 120°.
Proiettando ciascun vertice sulla retta passante per la diagonale a cui non appartiene, si ottengono i quattro punti A', B', C' e D'.
Qual è (espressa in m^2) l'area del quadrilatero $A'B'C'D'$?

7. Sapendo che $x^8 + \frac{1}{x^8} = 47$, dire quanto vale $x^{10} + \frac{1}{x^{10}}$. Se si ritiene che l'informazione fornita non sia sufficiente a rispondere, indicare come risposta 0.

8. Trovare in quanti modi il numero 14 si può scrivere come somma dei numeri 1 e 2 tenendo conto dell'ordine. (Ad esempio: $1+1+2+2+2+2+2+2$ e $1+2+1+2+2+2+2+2$ vanno considerati diversi e quindi contati entrambi)

9. Determinare la somma delle quarte potenze delle soluzioni reali della seguente equazione:

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-4} + \frac{4}{x-6} = -2.$$

10. Terminata la battaglia, Giulio Cesare decide di contare i superstiti della Decima Legione, la sua preferita. Con un rapido sguardo capisce subito che sono sicuramente meno di 1000. Per conoscerne il numero esatto ordina loro di mettersi in fila per 7, ma trova che, una volta formate tutte le file complete, resta una fila parziale di 5 soldati. Se invece prova a metterli in fila per 11 gliene restano spaiati 8. Se infine prova a metterli in fila per 13, quelli che restano spaiati sono 7.
Quanti sono i soldati? (Se i dati forniti sono insufficienti a determinare il risultato, indicare come risposta 0)

11. Sia dato il polinomio $p(x, y) = x^8 + y^8 + 2x^2y^6 + 2x^6y^2 + 3x^4y^4$. Trovare il più grande numero primo che divide $p(17, 13)$.

12. Di un polinomio $P(x)$ sappiamo che ha 2014 radici reali, tutte diverse tra loro. La somma di tali radici è 100, mentre la somma dei loro quadrati è 3000.
Trovare la somma dei quadrati delle radici reali di $P(x + 1)$.

13. Nel quadrato $ABCD$ si prendono due punti P e Q sul lato CD, distinti dai vertici, in modo che i segmenti AP e BQ si intersechino in un punto T interno al quadrato.
Trovare, in cm^2, l'area del triangolo ABT, sapendo che quella del triangolo PQT è 672cm^2, mentre quelle dei quadrilateri $BCPT$ e $ATQD$ sono, rispettivamente, 2014cm^2 e 3740cm^2.

14. Del polinomio a coefficienti interi $p(x)$ sappiamo che $p(1) = 3$ e $p(2) = 7$. Qual è il più piccolo valore positivo che può assumere $p(2014)$?

15. Dire quante sono le terne di numeri interi (k, n, m), con $1 \leq k \leq n \leq m$, tali che il loro massimo comune divisore è 7, mentre il loro minimo comune multiplo è 7.000.000.

16. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$$

dove ciascun x_k è un intero strettamente positivo tale che $x_k \leq k(6 - k)$.

17. Un distributore automatico contiene infinite caramelle di due tipi: quelle da 1024 milligrammi (che escono premendo il tasto bianco) e quelle da 1003 milligrammi (che escono premendo il tasto nero). Un bimbo, premendo più volte a suo piacere i tasti bianco e nero, prende delle caramelle e le mette nel suo sacchetto. Sia k il massimo numero intero positivo tale che, qualunque sia la sequenza dei tasti premuti dal bimbo, il sacchetto non conterrà mai k milligrammi di caramelle.
Scrivere le ultime 4 cifre di k (cioè migliaia, centinaia, decine e unità). Se si ritiene che tale k non esista indicare come risposta 0.

18. Una pulce si muove saltando tra le caselle di una scacchiera 4×4: parte da una casella di vertice e, dopo 28 salti tra caselle contigue (cioè aventi un lato in comune), torna nella casella da cui è partita. Sappiamo che dei 28 salti ce ne sono esattamente 7 per ciascuno dei quattro tipi possibili (alto, basso, destra, sinistra).
Se indichiamo con n il numero di diversi percorsi che può aver fatto la pulce, qual è il più grande numero primo che compare nella fattorizzazione di n?

19. Claudia ha 5 cesti contenenti ciascuno 97 palline, numerate da 0 fino a 96. Le palline del primo cesto sono blu, quelle del secondo sono verdi e quelle del terzo sono rosse. Le palline dei due cesti rimanenti sono bianche. Claudia prende 5 palline (una da ciascun cesto) avendo cura di sceglierle in modo che la somma sia 96 e le mette in un sacchetto, che poi porge a Luca.
Quante diverse configurazioni di palline possono capitare a Luca?
(Se il risultato fosse maggiore di 9999, indicare come risposta le 4 cifre più basse, cioè migliaia, centinaia, decine ed unità)

20. Ho una scacchiera rettangolare 3×10, le cui caselle sono (ovviamente) quadrate. Dispongo inoltre di 15 tessere da domino identiche, di dimensioni tali da ricoprire esattamente due caselle contigue della scacchiera.
In quanti modi diversi posso ricoprire esattamente tutta la scacchiera usando le 15 tessere?

Risposte e Statistiche

Nella tabella seguente, per ogni problema, riportiamo, nell'ordine, il risultato, il numero di squadre che l'ha scelto come jolly, il numero di risposte giuste e il numero complessivo di risposte che ha ricevuro durante la gara che, ricordiamo, ha coinvolto 18 squadre.
Ricordiamo che, in base al regolamento, ogni squadra poteva continuare a tentare di rispondere a un problema quanto voleva, quindi è successo spesso che una squadra abbia dato diverse risposte sbagliate ad un problema, prima di dare la risposta giusta.

		risultato	jolly	giuste	totali
Problema 1	:	343	3	17	23
Problema 2	:	1260	1	8	14
Problema 3	:	2014	2	16	21
Problema 4	:	240	1	14	29
Problema 5	:	4028	0	7	10
Problema 6	:	1960	0	4	4
Problema 7	:	123	0	2	11
Problema 8	:	610	3	15	25
Problema 9	:	849	0	6	7
Problema 10	:	943	3	14	18
Problema 11	:	97	0	4	5
Problema 12	:	4814	0	4	5
Problema 13	:	3402	0	0	3
Problema 14	:	8055	2	8	10
Problema 15	:	218	0	0	7
Problema 16	:	124	0	3	15
Problema 17	:	5045	2	2	5
Problema 18	:	233	0	0	3
Problema 19	:	425	0	0	2
Problema 20	:	571	1	1	12