Roma, 26 Marzo 2015 - Università di Roma Tor Vergata

Gara a Squadre di Secondo Livello - VIII edizione

(valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico)

Con il supporto di: **Bruno Mondadori, Cicap, UMI, Zanichelli**

Problemi a cura di: Emanuele Callegari, Roberto Tauraso, Vincenzo Di Gennaro, Giovanbattista Marini, Antonio Rapagnetta

1. Qual è il più grande numero primo che divide 66711?

2. L'area di un esagono regolare è di 5460cm^2. Trovare l'area (espressa in cm^2) dell'insieme $\mathcal{S}$ costituito da tutti e soli i punti P interni all'esagono con la seguente proprietà: *qualsiasi lato dell'esagono si prenda, la proiezione di P sulla retta su cui giace il lato, appartiene al lato.*

3. Una sfera, sospesa in una stanza cubica, viene tagliata in tanti pezzi usando 10 piani, ciascuno parallelo ad una parete o al pavimento. Qual è il massimo numero di pezzi che si può ottenere?

4. Quanti sono gli anagrammi di **PISTOLA** tali che, se si cancellano le lettere **L**, **O** e **T**, si ottiene la parola **SPIA**?

5. In quanti modi posso scegliere un insieme di 5 numeri interi tra 1 e 50 in modo che la differenza tra due qualsiasi di essi sia almeno 10?

6. Un quadrato è suddiviso in 4 parti, tutte con aree diverse tra loro, da 2 rette perpendicolari tra loro e parallele a qualche lato del quadrato. Sappiamo che l'area della parte più piccola è 6m^2 mentre l'area della più grande è 600m^2. Delle 2 parti rimanenti sappiamo solo che hanno area intera (espressa in metri quadrati).
Qual è, in metri quadrati, il massimo valore che può avere l'area del quadrato?

7. Nel piano cartesiano, sia n il numero di punti con entrambe le coordinate intere che distano al massimo 10^6 dall'origine. Quali sono le tre cifre più alte di n? (ovvero se in notazione decimale si ha $n = abc.........$, la risposta da dare è "abc")

8. Per quanti diversi valori A, interi strettamente positivi e non superiori a 9999, esiste un polinomio $p(x)$ con tutti i coefficienti uguali a 0, 1 o -1 tale che $p(4) = A$?

9. Un quadrilatero inscritto in una circonferenza ha le diagonali entrambe uguali a 20m e due lati consecutivi che misurano rispettivamente 7m e 15m. Qual è, espressa in m^2, l'area massima che può avere il quadrilatero?

10. Dire quante sono le permutazioni dei primi 100 numeri interi positivi che hanno la seguente proprietà: cancellando uno dei numeri, opportunamente scelto, si ottiene una lista di numeri in ordine crescente.

11. Nel triangolo ABC si prenda P sul lato BC e Q sul lato CA. Detti $\mathcal{T}_1$ il triangolo APC e $\mathcal{T}_2$ il triangolo QBC, sappiamo che le aree di $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ sono rispettivamente 847m^2, 175m^2 e 147m^2. Qual è, espressa in m^2, l'area di ABC?

12. In un poligono regolare di 7 lati, ciascun lato viene colorato con un colore a scelta tra **bianco**, **nero**, **giallo**, **verde** o **rosso**, senza l'obbligo di usarli tutti, ma facendo in modo che lati consecutivi non siano mai dello stesso colore.
In quanti modi diversi si può farlo? (due colorazioni vanno considerate uguali, e quindi contate una sola volta, se esiste una rotazione che le fa coincidere)

13. In quanti modi si possono scegliere i segni nell'espressione

$$1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5 \pm 6 \pm 7 \pm 8 \pm 9$$

in modo che il risultato sia divisibile per 5?

14. Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti reali tale che $p(p(x)) = (p(x))^{2016} + 2015$. Quanto vale $p(49)$?
(se $p(x)$ non esiste o se $p(49)$ non è univocamente determinato dare come risposta 0; se $p(49)$ è univocamente determinato ma è maggiore di 9999, indicare come risposta le quattro cifre più basse, cioè migliaia, centinaia, decine e unità.)

15. Trovare qual è il minimo valore che può assumere la somma di 90 numeri reali positivi x_1, x_2, x_3, ... x_{90}, sapendo che:

$$\frac{1^2}{x_1} + \frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3} + \ldots + \frac{90^2}{x_{90}} = 4225.$$

16. Sia n un numero intero la cui notazione binaria è

$$\underbrace{111\ldots111}_{2015}01$$

Qual è la somma delle cifre della notazione binaria di n^3?

17. In un parallelepipedo $ABCDEFGH$ prendiamo P sullo spigolo AB e Q sullo spigolo FG. Indichiamo con $\mathcal{T}_1$ il tetraedro $CPBF$ (vedi fig. **1**) e con $\mathcal{T}_2$ il tetraedro $EQFB$ (vedi fig. **2**).

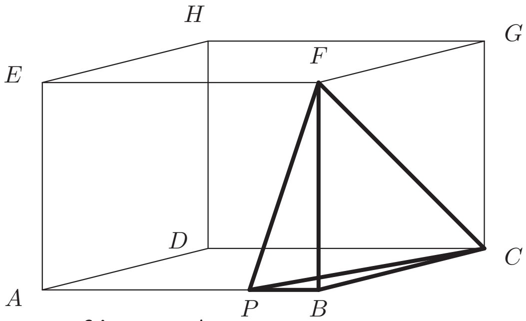

figura 1

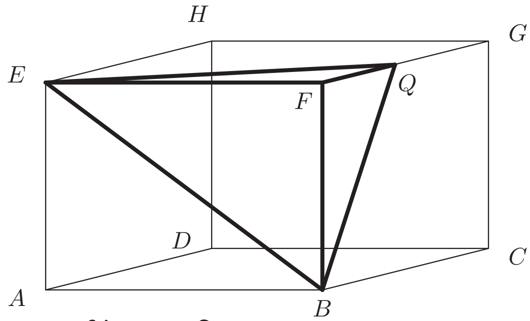

figura 2

Sappiamo che i volumi di $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ e $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$, sono rispettivamente 105cm^3, 70cm^3 e 12cm^3.
Trovare, espresso in cm^3, il volume del parallelepipedo.

18. Prendiamo una scacchiera 334×3, cioè una tabella di 334 righe e 3 colonne con le caselle colorate di bianco e di nero in modo tale che caselle con un lato in comune abbiano colore diverso. Mettiamo il re del gioco degli scacchi nella casella centrale della prima riga e indichiamo con N il numero di percorsi diversi lunghi 335 mosse che, partendo da tale casella e passando sempre su caselle dello stesso colore, lo portano nella $334-$esima riga.
Quali sono le 4 cifre più basse di N?

19. Siano $P(x) = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots - x^{2015}$ e $Q(x) = 1 + 4x + 9x^2 + \ldots + (n+1)^2 x^n + \ldots + 2016^2 x^{2015}$.
Si consideri il polinomio (enorme) che si ottiene calcolando $\left(P(x)\right)^{12} \cdot \left(Q(x)\right)^3$ e sommando tra loro i termini simili.
Sia N il coefficiente di x^{244} in tale polinomio. Quali sono le 4 cifre più basse di N, cioè migliaia, centinaia, decine e unità?

20. Un **polimino** è una figura geometrica piana ottenuta unendo un numero finito di quadrati di lato unitario in modo che ogni quadrato abbia almeno un intero lato in comune con un altro quadrato. Tra i polimini di area 7 quelli di perimetro minimo a meno di traslazioni, rotazioni e riflessioni sono i seguenti 4:

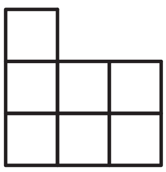
figura 3

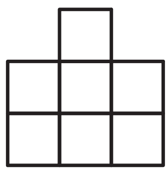
figura 4

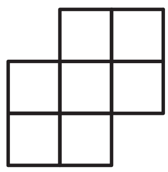
figura 5

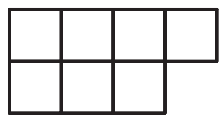
figura 6

Tra i polimini di area 21, quanti sono quelli di perimetro minimo a meno di traslazioni, rotazioni e riflessioni?

(a gara finita)

Informazioni Utili

- **Risultati, Statistiche e Video con i problemi risolti:** I risultati dei problemi, le statistiche della gara e i video con gli svolgimenti dettagliati di alcuni problemi saranno pubblicati la sera del **30 Marzo 2015** su **www.problemisvolti.it**.

- **Preparazione per Cesenatico:** In preparazione alla finale nazionale di Cesenatico, l'Università di Roma *Tor Vergata* organizza la **Disfida Matematica "Urbi et Orbi"**, quest'anno già alla 5^a edizione. La gara si svolgerà on line il **20 Aprile 2015** attraverso il sito **www.campigotto.it**, col nome di **II Allenamento per Cesenatico**. Si può partecipare sia on line sia recandosi a *Tor Vergata*, dove a fine gara si potranno avere chiarimenti su come andavano svolti i problemi. Altri dettagli (aula, orario, ecc.) verranno pubblicati sulla pagina web delle olimpiadi dell'Università di *Tor Vergata*: **www.mat.uniroma2.it/~olimpiad/**.

Risposte dei Problemi

		risultato	giuste	sbagliate	totali
Problema 1	:	601	19	5	24
Problema 2	:	1820	16	4	20
Problema 3	:	80	18	6	24
Problema 4	:	210	17	21	38
Problema 5	:	2002	8	11	19
Problema 6	:	1064	3	20	23
Problema 7	:	314	5	3	8
Problema 8	:	1093	3	7	10
Problema 9	:	192	12	4	16
Problema 10	:	9802	5	10	15
Problema 11	:	1375	0	0	0
Problema 12	:	2340	0	10	10
Problema 13	:	52	3	31	24
Problema 14	:	1216	2	4	6
Problema 15	:	3969	3	0	3
Problema 16	:	4033	1	8	9
Problema 17	:	2520	1	1	2
Problema 18	:	8048	3	19	22
Problema 19	:	4000	0	2	2
Problema 20	:	28	0	20	20