

Roma, 17 Marzo 2016 - Università di Roma Tor Vergata

## Gara a Squadre di Secondo Livello - IX Edizione

(valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico)

Con il supporto di: Agenzia Spaziale Italiana, Archimede, IAC-CNR, Lettera Pristem,  
Piano Lauree Scientifiche, Science&Comics, Unione Matematica Italiana

Problemi a cura di (in ordine alfabetico): Emanuele Callegari, Giambattista Marini, Antonio Rapagnetta, Roberto Tauraso

1. La prof.ssa Celletti, direttore del dip. di Matematica dell'Università di Roma *Tor Vergata*, deve sommare tra loro 230 numeri molto grandi ma ha rotto il computer. Chiede allora aiuto ai colleghi di dipartimento, che sono 80. Decidono che ciascuno di loro, se al mattino riceve una mail dal direttore contenente due numeri, si impegna a scrivere entro la mezzanotte una mail di risposta contenente la somma dei due numeri ricevuti. Quanti giorni servono, al minimo, per calcolare la somma dei 230 numeri?

2. Luca e Samantha, i due astronauti che l'*Agenzia Spaziale Italiana* ha mandato su Marte nel 2025, fanno l'inventario del cibo rimasto in previsione del loro rientro sulla Terra. Hanno calcolato che se Luca fosse da solo il cibo gli basterebbe per 924 giorni mentre, se fosse da sola Samantha che è più minuta, il cibo le basterebbe per 1617 giorni. Mangiando entrambi, per quanti giorni durerà il cibo?

3. Si consideri la sequenza di numeri in ordine crescente degli interi positivi che sono divisibili per 3 o che hanno almeno un 3 nelle loro cifre:

$$3, 6, 9, 12, 13, 15, 18, 21, 23, \dots$$

Qual è il 2016-esimo termine di tale sequenza?

4. Il crivello di Eratostene è un antico procedimento per determinare l'elenco dei numeri primi fino ad un certo numero intero positivo fissato  $n$ . Funziona così:

(a) Si scrivono i numeri da 2 fino a  $n$ .

(b) Si cerchia di rosso il numero 2 e si tolgono tutti i suoi multipli (tranne lui) dall'elenco.

(c) Tra i numeri dell'elenco che non sono ancora stati né tolti né cerchiati di rosso, si sceglie il più piccolo per cerciarlo di rosso, poi si tolgono, procedendo in ordine crescente, tutti i suoi multipli (tranne lui) da quelli che restano nell'elenco.

(d) Si ripete l'operazione (c) finché ogni numero dell'elenco sarà stato tolto o cerchiato di rosso.

I numeri che alla fine rimangono cerchiati di rosso sono i numeri primi minori o uguali ad  $n$ .

Se si esegue il procedimento con  $n = 10000$ , qual è l'ultimo numero che viene tolto?

5. Sia  $ABCD$  un quadrilatero convesso e sia  $P$  un punto del lato  $AB$  diverso da  $B$ . Sappiamo che  $AB = AC = BD = 3AD = 3BC = 3CP$  e che, detta  $Q$  l'intersezione di  $CP$  e  $BD$ , l'area del triangolo  $PBQ$  è 17. Trovare l'area di  $APQT$  dove  $T$  è l'intersezione di  $AC$  e  $BD$ .

6. Nel rombo  $ABCD$  si ha  $AB = 2016$  e  $\widehat{ABC} = 72^\circ$ . Quanto dista da  $D$  un punto  $P$  che sia equidistante da  $A$ ,  $B$  e  $C$ ?

7. Per costruire un dado dodecaedrico *sbilanciato* si prende un dodecaedro regolare e su ciascuna delle sue facce si scrive un numero da 1 a 6 in modo che tutti i numeri compaiano almeno una volta e uno di essi 7 volte. Quanti diversi dadi dodecaedrici sbilanciati si possono costruire? (due distribuzioni di numeri vanno considerate identiche, e quindi contate una sola volta, se esiste una rotazione nello spazio che le sovrappone)

8. Per ogni intero positivo  $n$  indichiamo con  $R_n$  l'intero più vicino alla sua radice quadrata. Dire con quanti zeri termina il prodotto  $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot R_4 \cdot \dots \cdot R_{2016}$ .

9. La *Sonda Remota* che l'*Agenzia Spaziale Italiana* ha mandato ad esplorare il pianeta *Terminus*, in previsione di una sua colonizzazione, ha rivelato che la sua superficie è perfettamente sferica e per la maggior parte coperta d'acqua. Vi è infatti un unico continente, tutto contenuto nell'emisfero nord, costituito da tutti e soli i punti del pianeta per i quali il tragitto per raggiungere il polo nord è minore o uguale di 500 Km. Sapendo che le coste del continente sono lunghe 3000 Km, dire quanto misura, in chilometri, l'equatore.

10. Il triangolo  $ABC$  è rettangolo in  $B$  ed ha  $\widehat{A} = 30^\circ$ . La bisettrice di  $\widehat{A}$  divide il triangolo in due parti, la minore delle quali ha area  $2738 \text{ cm}^2$ . Quanti centimetri misura tale bisettrice?

11. Sia  $n = 15328471582$ , che resto si ottiene dividendo  $n^{10}$  per 495?

12. Del numero intero positivo  $n$  sappiamo che ha 144 divisori. Quanti ne ha, al massimo, il suo quadrato?

13. Quanti sono gli anagrammi della parola **VENTOTTO** che non hanno mai due lettere adiacenti uguali?

14. I lati del triangolo  $\mathcal{T}_1$  misurano 21, 20 e 13. La circonferenza inscritta in  $\mathcal{T}_1$  tocca i suoi lati in 3 punti che sono vertici di un triangolo  $\mathcal{T}_2$ . Sia  $\frac{m}{n}$  la frazione, ridotta ai minimi termini, che rappresenta l'area di  $\mathcal{T}_2$ . Quanto vale  $m + n$ ?
15. Nel piano cartesiano la retta  $y = x$  interseca l'ellisse  $\frac{x^2}{576} + \frac{y^2}{441} = 1$  nei punti  $P$  e  $Q$ . Calcolare l'area del quadrilatero  $ABCD$  circoscritto all'ellisse e tale che  $BC$  e  $DA$  sono paralleli a  $PQ$  mentre  $AB$  e  $CD$  sono tangenti all'ellisse rispettivamente nei punti  $P$  e  $Q$ .
16. In un tetraedro una mediana è un segmento che unisce un vertice al baricentro della faccia opposta. Sappiamo che un tetraedro ha tre mediane lunghe 24, 26 e 28 e che inoltre, tra tutti i tetraedri con tre mediane di tali misure, è quello di volume massimo. Quanto vale il quadrato della lunghezza della quarta mediana?
17. Vogliamo scrivere i numeri interi da 1 a 20, ciascuno esattamente una volta, nelle 20 caselle della figura 1 in modo che valga la seguente proprietà: *se due caselle hanno in comune una parte di lato verticale, il numero scritto in quella più a destra è più grande*.  
In quanti modi possiamo farlo?

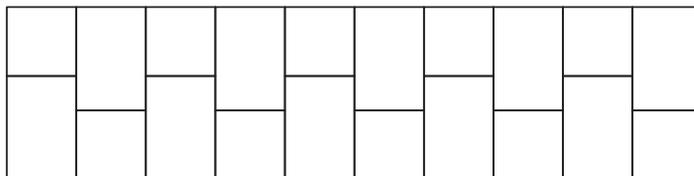


figura 1

18. Sia  $P(x)$  un polinomio a coefficienti interi non negativi, tale che  $P(0) = 33$ ,  $P(1) = 40$  e  $P(9) = 60000$ . Quanto vale  $P(6)$ ? (Se si ritiene che i dati siano insufficienti a rispondere, dare come risposta 0. Se non esiste alcun polinomio con le caratteristiche richieste dare come risposta 9999.)
19. Su ciascuna delle caselle della tabella in figura 2 è scritta una cifra da 1 a 9 in modo che, comunque si prendano due caselle contigue, la cifra scritta su quella a destra è maggiore o uguale di quella a sinistra. Metto una pulce su una casella qualsiasi e le ordino: – *Ogni volta che batterò le mani, guarda il numero scritto sulla casella in cui ti trovi e salta sulla casella la cui posizione, contando da sinistra, è esattamente quel numero. Ad esempio se sulla tua casella è scritto il numero 1 devi saltare sulla prima casella, se è scritto 2 devi saltare sulla seconda, e così via.* Scopro che si verifica il fatto seguente: qualunque sia la casella dove piazzò inizialmente la pulce, dopo 2016 battiti di mani essa va sempre a finire su una delle due caselle alle estremità della tabella.  
In quanti modi diversi possono essere scritti i numeri sulla tabella?

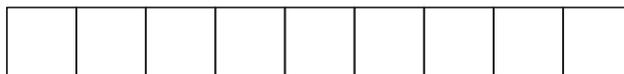


figura 2

20. Il Prof. Natalini (direttore IAC-CNR) e il Prof. Ciliberto (presidente UMI), hanno deciso di contendersi i (magri!) finanziamenti statali sfidandosi a **Brucia e Spezza**.  
Le regole del gioco sono le seguenti:
- si comincia mettendo sul tavolo 3 bastoni, ciascuno di lunghezza intera strettamente positiva;
  - a turno, ciascun giocatore butta nel fuoco due dei 3 bastoni che sono sul tavolo e spezza il rimanente in 3 pezzi di lunghezza intera e strettamente positiva, che rimette sul tavolo;
  - perde chi non ha più mosse da poter fare, cosa che accade non appena i 3 pezzi sul tavolo hanno tutti lunghezza minore o uguale a 2.
- Ad un certo punto ci sono sul tavolo 3 bastoni che misurano 2016, 2017 e 2018 ed è il turno del Prof. Natalini, il quale si rende conto di poter forzare la vittoria.  
Quante sono le possibili mosse che gli permettono di farlo?

(a gara finita)

## Informazioni Utili

- **Risultati, Statistiche e Video con i problemi risolti:** I risultati dei problemi, le statistiche della gara e i video con gli svolgimenti dettagliati di alcuni problemi saranno pubblicati la sera del **21 Marzo 2016** su [www.problemisvolti.it](http://www.problemisvolti.it).
- **Preparazione per Cesenatico:** In preparazione alla finale nazionale di Cesenatico, l'Università di Roma *Tor Vergata* organizza la **Disfida Matematica "Urbi et Orbi"**, quest'anno già alla 6<sup>a</sup> edizione. La gara si svolgerà on line il **18 Aprile 2016** attraverso il sito [www.campigotto.it](http://www.campigotto.it) e sarà aperta a partecipazione internazionale (testo bilingue: Italiano e Inglese).

## Risposte date ai Problemi

	risultato	giuste	sbagliate	totali
Problema 1 :	9	19	7	26
Problema 2 :	588	18	6	24
Problema 3 :	3474	5	32	37
Problema 4 :	9991	14	16	30
Problema 5 :	712	2	6	8
Problema 6 :	2016	9	1	10
Problema 7 :	9504	2	1	3
Problema 8 :	446	6	10	16
Problema 9 :	6000	3	0	3
Problema 10 :	148	8	0	8
Problema 11 :	199	5	3	8
Problema 12 :	2025	14	9	23
Problema 13 :	960	4	19	23
Problema 14 :	1829	3	2	5
Problema 15 :	2016	3	2	5
Problema 16 :	2036	1	0	1
Problema 17 :	5741	4	8	12
Problema 18 :	8115	8	6	14
Problema 19 :	4290	1	1	2
Problema 20 :	9520	1	4	5