Roma, 14 Marzo 2017 - Università di Roma Tor Vergata

Gara a Squadre di Secondo Livello - X Edizione

(valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico)

Con il supporto di: **Agenzia Spaziale Italiana, Archimede, IAC-CNR, Lettera Pristem, Piano Lauree Scientifiche, Science&Comics, Unione Matematica Italiana**

Problemi a cura di (in ordine alfabetico): Emanuele Callegari, Gianni Marini, Antonio Rapagnetta, Roberto Tauraso, Stefano Viaggiu

1. Qual è il minimo valore della parte intera dell'espressione $n^{\frac{1}{\log_{97} n}}$, al variare di n tra gli interi positivi di 3 cifre?

2. Nel compito di algebra, ad un certo punto Luca scrive $5 \cdot 19 = 65$, che è ovviamente sbagliato, se i numeri si intendono in base 10.
Tuttavia Luca sostiene che tutto ciò che ha scritto è giusto, perché come base non sta usando la base 10, ma una base diversa. Che base sta usando Luca?

3. Del polinomio di terzo grado $p(x) = 15x^3 + Bx^2 - 36x - 24$ non conosciamo il coefficiente B ma sappiamo che esiste un numero $\alpha > 0$ tale che sia α che $-\alpha$ sono soluzioni dell'equazione $p(x) = 0$.
Quanto vale B?

4. Del polinomio $Q(x)$ sappiamo che è della forma

$$Q(x) = x^8 + 12x^7 + 76x^6 + \text{ termini di grado inferiore}$$

e che è stato ottenuto calcolando $p(p(p(x)))$ a partire da un altro polinomio $p(x)$ che non si conosce.
Trovare la somma dei coefficienti di $Q(x)$.

5. Dell'esagono convesso $ABCDEF$ sappiamo che la diagonale AD lo divide in due parti di aree 360 e 675, mentre la diagonale BE interseca AD nel punto O in modo tale che $OBCD$ e $AOEF$ sono dei parallelogrammi.
Sapendo che $OBCD$ e $AOEF$ hanno la stessa area, dire qual è quest'area.

6. Calcolare la somma di tutti i quadrati perfetti che dividono 9!.

7. Sia n il numero la cui rappresentazione binaria è $\overbrace{111\ldots111}^{2017}$. Che resto si ottiene dividendo n per 1025?

8. I 720 numeri che si ottengono permutando le 6 cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6 sono disposti in ordine crescente. Qual è il centesimo numero dispari secondo tale ordine? (Dare come risposta le sue quattro cifre più basse, cioè migliaia, centinaia, decine ed unità)

9. Il triangolo ABC ha lati $AB = 9$, $BC = 10$ e $CA = 11$. Sia D il piede dell'altezza condotta da A a BC e siano E ed F i piedi delle perpendicolari condotte da D ad AB e AC, rispettivamente. Infine sia G l'intersezione tra AD e EF. Il rapporto AG/GD è una frazione ridotta ai minimi termini a/b. Fornire come risposta al problema il prodotto $a \cdot b$.

10. Ieri Mario ha compiuto gli anni e alla sua festa ha raccontato che il nonno ad ogni compleanno gli regala un assegno di importo in euro pari al prodotto delle loro età. Gli ultimi cinque assegni ammontano complessivamente a 7065 euro. Se M e N sono le età (nella giornata di ieri) rispettivamente di Mario e del nonno, quanto vale $M \cdot 100 + N$?

11. Siano m e n due numeri positivi tali che

$$\frac{2016}{2017} < \frac{m}{n} < \frac{2017}{2018}.$$

Qual è il valore minimo che può assumere la somma $m + n$?

12. Due numeri interi positivi n e m soddisfano la relazione

$$\mathrm{MCD}(m,n)+\mathrm{mcm}(m,n)+m+n=90.$$

Quanto vale, al massimo, il prodotto $m\cdot n$?

13. Un triangolo ABC è circoscritto ad un'ellisse γ che è tangente in P al lato AB, in Q al lato BC e in R al lato AC. Sappiamo inoltre che $AR=112$, $AP=160$, $BP=192$, $BQ=144$ e $CQ=240$.
Qual è il perimetro di ABC?
(Se si ritiene che i dati siano insufficienti a determinare in modo univoco la risposta dare come risposta 0, se invece si ritiene che siano tra loro incompatibili dare come risposta 9999)

14. Sia $p(x)$ un polinomio del tipo $p(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tale che l'equazione $p(x)=-4$ ha 3 soluzioni intere distinte aventi somma 2. Se inoltre esiste n intero positivo tale che $p(n)=2017$, dire quanto vale n. (Se si ritiene che una tale n non possa esistere dare come risposta 0, se invece le informazioni non bastano a identificare n in modo univoco, indicare come risposta 9999)

15. Sia dato nel piano un triangolo ABC con lati $AB=13$, $BC=14$ e $CA=15$. Sia $\mathcal{S}$ il luogo dei punti P del piano tale che la somma delle aree dei triangoli APB, BPC e CPA non superi il triplo dell'area di ABC. Qual è l'area di $\mathcal{S}$?

16. L'ASI (Agenzia Spaziale Italiana) si accinge a far atterrare una sonda automatica sull'asteroide *Kenoncè*, uno strano asteroide a forma di tetraedro regolare con lo spigolo di 1000 Km. La sonda è costituita da una parte fissa (=**Mamma**) e un piccolo veicolo-robot elettrico (=**Bimbo**) che si stacca da **Mamma** per esplorare l'asteroide: **Mamma** è dotata di pannelli solari e funge da stazione di ricarica per **Bimbo**, che torna periodicamente da **Mamma** per ricaricarsi. Quale deve essere, espressa in chilometri, la minima autonomia di **Bimbo**, se si vuole che esista un punto della superficie del pianeta tale che, piazzandoci **Mamma**, **Bimbo** possa raggiungere un qualsiasi altro punto della superficie e poi tornare da **Mamma** prima di scaricarsi.

17. Claudia sta giocando ad un videogioco. Ad un certo punto del gioco la sua percentuale di vittorie è dell'89%. A quel punto vince 6 partite di fila: dopo la prima la percentuale di vittorie passa al 90%, mentre dopo la sesta scatta al 91%. Qual è il numero totale di partite che ha giocato nel momento in cui la percentuale scatta al 91%?
(*Osservazione:* il display del videogioco mostra sempre la percentuale di vittorie approssimata al meglio, ovvero 73.4% diventa 73%, 73.5% diventa 74% e 73.6% diventa 74%)

18. In quanti modi posso scrivere 3033030^4 come prodotto di tre numeri interi positivi? Dare come risposta le 4 cifre meno significative del risultato (cioè migliaia, centinaia decine ed unità).
(*Osservazione*: due prodotti contenenti gli stessi fattori, anche se in ordine diverso, sono da considerarsi identici e quindi vanno contati una sola volta)

19. Per ogni intero positivo n indichiamo con $\mathcal{D}(n)$ il più grande divisore dispari di n. Calcolare:

$$\mathcal{D}(1)+\mathcal{D}(2)+\mathcal{D}(3)+\ldots+\mathcal{D}(99)+\mathcal{D}(100).$$

20. Su ogni faccia di un cubo viene tracciato il segmento che unisce i punti medi di due lati opposti, una metà viene dipinta di giallo e l'altra di rosso. Quanti sono i diversi cubi che si possono ottenere colorandoli in questo modo? (due colorazioni vanno considerate identiche, e quindi contate una sola volta, se esiste una rotazione nello spazio che le fa sovrapporre)

(a gara finita)

Informazioni Utili

- Risultati, Statistiche e Video con i problemi risolti: I risultati dei problemi, le statistiche della gara e i video con gli svolgimenti dettagliati di alcuni problemi saranno pubblicati la sera del **27 Marzo 2017** su **www.problemisvolti.it**.

- Preparazione per Cesenatico: In preparazione alla finale nazionale di Cesenatico, l'Università di Roma *Tor Vergata* organizza la **Disfida Matematica "Urbi et Orbi"**, quest'anno già alla 7^a edizione. La gara si svolgerà on line il **10 Aprile 2017** attraverso il sito **www.campigotto.it** e sarà aperta a partecipazione **internazionale** (testo bilingue: **Italiano** e **Inglese**).

Risposte

		risultato
Problema 1	:	97
Problema 2	:	40
Problema 3	:	10
Problema 4	:	8744
Problema 5	:	300
Problema 6	:	7735
Problema 7	:	896
Problema 8	:	6341
Problema 9	:	168
Problema 10	:	1985
Problema 11	:	8068
Problema 12	:	450
Problema 13	:	1072
Problema 14	:	31
Problema 15	:	1092
Problema 16	:	2000
Problema 17	:	53
Problema 18	:	7656
Problema 19	:	3344
Problema 20	:	192