

Roma, 15 Marzo 2018 - Università di Roma Tor Vergata

Gara a Squadre di Secondo Livello - XI Edizione

(valevole per l'accesso alla fase nazionale di Cesenatico)

Con il supporto di: IAC-CNR, Piano Lauree Scientifiche, Unione Matematica Italiana

Problemi a cura di (in ordine alfabetico): E. Callegari, V. Di Gennaro, L. Ferrigno, G. Marini, A. Rapagnetta, A. Sgueglia, R. Tauraso, R. Vacca.

1. Quanti sono i divisori positivi dispari di 54054 che sono divisibili per 3?
2. Un quadrilatero $ABCD$ è inscritto in una circonferenza. Sappiamo che $\widehat{DAB} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 90^\circ$ e $AB = BC$. Sappiamo inoltre che la diagonale AC lo divide in due parti di cui quella con area minore ha area 2310. Qual è l'area totale di $ABCD$?
3. Un trapezio isoscele ha una circonferenza inscritta. Il suo perimetro vale 2178 e la sua base minore 429. Quanto vale la lunghezza del segmento che unisce i due punti di tangenza alla circonferenza inscritta che stanno sui lati obliqui?
4. Del parallelepipedo rettangolo \mathcal{P} sappiamo che, incrementando di un'unità ciascuna delle 3 dimensioni, il volume aumenta di 535 e la superficie totale aumenta di 164. Qual era inizialmente la superficie totale di \mathcal{P} ?
5. I lati di un triangolo ABC misurano $AB = 68$, $BC = 110$ e $CA = 174$. Siano P il punto medio di AB , Q il punto medio di BC e R un punto esterno al triangolo ABC tale che i segmenti PR e QR sono tagliati a metà dal lato AC . Quanto vale l'area del quadrilatero $PSTQ$ dove S è il punto medio di PR e T è il punto medio di QR ?
6. In un quadrilatero convesso $ABCD$, le circonferenze inscritte nei triangoli ABC e CDA intersecano la diagonale AC rispettivamente in due punti E e F . Quanto vale la lunghezza del segmento EF se $AB = 98$, $BC = 153$, $CD = 174$ e $DA = 201$?
7. Quanti sono i numeri interi positivi di sei cifre dove tutte le cifre sono dispari e ogni 9 è seguito da un 1?
8. Il papà di Ada, Beatrice, Carlo e Dario vuole dividere tra di loro 2018 caramelle (tutte uguali), in modo tale che Ada e Carlo ne ricevano un numero dispari. In quanti modi può farlo? (Se il risultato ha più di 4 cifre, dare come risultato le ultime quattro cifre del numero)
9. Tre coppie (3 dame e 3 cavalieri) si siedono ad una tavola rotonda da 10 posti in modo tale che due dame non siano mai sedute in posti vicini. In quanti modi possono farlo? (due modi vanno considerati identici se si ottengono uno dall'altro per rotazione).
10. In quanti modi si può scrivere il numero 3600 come somma di interi positivi dispari consecutivi?
11. Trovare le 4 cifre più basse (cioè migliaia, centinaia, decine ed unità) di $2^{10^{2018}}$.
12. Per un certo polinomio P vale la seguente proprietà: $P(n+2) + P(n) = n^4 + 2$ per ogni intero positivo n . Quanto vale $P(10)$?
13. In un quadrilatero $ABCD$, si ha che $BC = CD = DA$. Se $\widehat{C} = 164^\circ$ e $\widehat{D} = 76^\circ$ allora quanto misura, in gradi, l'angolo \widehat{A} ?
14. Sia dato il triangolo ABC e siano M il punto medio di AB ed N il punto medio dell'arco BC non contenente A della circonferenza circoscritta ad ABC . Detti inoltre D , E ed F i punti di tangenza della circonferenza inscritta di ABC rispettivamente con i lati BC , AC e AB , sia O il punto medio dell'arco DF di quest'ultima circonferenza non contenente E . Si sa infine che le rette CM , AN e BO si incontrano in un punto P e che $AB = 389$ e $AC = 563$. Calcolare la lunghezza di BC .

15. Si consideri il seguente gioco. Si parte da un numero intero positivo e , a turno, i due giocatori sottraggono al numero corrente n la sua radice quadrata, se n è un quadrato perfetto, mentre se n non è un quadrato perfetto gli sottraggono l'intero che approssima la sua radice, per eccesso o per difetto a scelta del giocatore. Così, se $n = 36$ allora il giocatore deve togliere 6 mentre se $n = 40$ il giocatore può scegliere se togliere 6 o 7. Vince il giocatore che per primo raggiunge il numero 0. Quanti sono i numeri interi n tali che $1 \leq n \leq 2018$ per i quali il gioco, con numero iniziale n , è favorevole al giocatore che inizia?

16. Sia P un punto interno ad un tetraedro $ABCD$ e siano Π_1, Π_2, Π_3 e Π_4 , quattro piani distinti passanti per P e ciascuno parallelo ad una faccia diversa del tetraedro. Questi 4 piani dividono il tetraedro in 14 parti. Quattro di queste parti hanno forma di tetraedro ed hanno volume rispettivamente 1, 64, 125 e 216. Qual è il volume del tetraedro $ABCD$?

17. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 , le radici del polinomio $p(x) = x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x - 1$. Calcolare quanto vale la somma:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{\alpha_i^4 - 15\alpha_i^2 - 10\alpha_i + 24}$$

Esprimere il risultato nella forma $\frac{m}{n}$ con n ed m primi tra loro e dare come risposta $m + n$.

18. Sia $ABCD$ una piramide a base triangolare tale che il piede dell'altezza condotta da A alla faccia BCD , che è acutangola, cade nel suo ortocentro H . Siano K ed L i piedi delle perpendicolari condotte da A rispettivamente a BD e CD . Si sa che $\widehat{KAC} = 90^\circ$, $BH = 207$ e $AL = 460$. Trovare la lunghezza di AH .

19. Sia A l'insieme di tutti i divisori di 30, compresi 1 e 30. Dire in quanti modi diversi posso scegliere un sottoinsieme B di A , contenente sia 1 che 30 e avente inoltre la seguente proprietà: "se $n \in B$ e $m \in B$ allora anche $\text{MCD}(n, m)$ e $\text{mcm}(n, m)$ appartengono a B ".

20. Il rettangolo 2×10 in figura 1 viene ricoperto esattamente, senza sovrapposizioni, da 11 rettangoli di lati interi in modo che, per ciascuna delle 9 linee verticali interne, almeno un pezzo di lunghezza 1 faccia parte del bordo di almeno uno degli 11 rettangoli. Un esempio di ricoprimento ammissibile è riportato in figura 2. In quanti modi si può fare questa suddivisione? (due modi diversi vanno considerati distinti anche se c'è un movimento rigido che li sovrappone)



figura 1



figura 2

(a gara finita)

Informazioni Utili

- **Risultati, Statistiche e Video con i problemi risolti:** I risultati dei problemi, le statistiche della gara e i video con gli svolgimenti dettagliati di alcuni problemi saranno pubblicati la sera del **19 Marzo 2018** su www.problemisvolti.it.
- **Preparazione per Cesenatico:** In preparazione alla finale nazionale di Cesenatico, l'Università di Roma *Tor Vergata* organizza la **Disfida Matematica "Urbi et Orbi"**, quest'anno già alla 8^a edizione. La gara si svolgerà on line il **16 Aprile 2018** attraverso il sito www.campigotto.it. La gara ha testo bilingue (**Italiano e Inglese**) e quest'anno avrà il suo primo vero battesimo **internazionale**: sarà utilizzata come gara-evento all'interno delle EGMO (European Girl Mathematical Olimpiad) che quest'anno saranno ospitate a Firenze (vedi: <http://www.egmo2018.org/>).

Risposte

	risultato
Problema 1	: 24
Problema 2	: 6930
Problema 3	: 520
Problema 4	: 989
Problema 5	: 594
Problema 6	: 41
Problema 7	: 5473
Problema 8	: 3785
Problema 9	: 6300
Problema 10	: 14
Problema 11	: 9376
Problema 12	: 3041
Problema 13	: 82
Problema 14	: 563
Problema 15	: 1029
Problema 16	: 4096
Problema 17	: 715
Problema 18	: 276
Problema 19	: 29
Problema 20	: 2036